实验室认可对不确定度的要求

2007.09.14

说明：本讲义来源于2007年7月12日~13日在北京召开的2007年APLAC同行评审见证工作沟通会议上施昌彦先生的报告《实验室认可对不确定度与量值溯源的要求》。

讲课提纲

一、误差、允差、准确度与不确定度

二、测量不确定度的评定与表示

三、与不确定度有关的认可公开文件

一、误差、允差、准确度与不确定度

（一）测量误差、准确度与不确定度

（二）示值误差、允差与不确定度

（一）测量误差、准确度与不确定度

1、用不确定度评定来代替误差评定的原因

用传统方法对测量结果进行误差评定主要遇到两方面的问题：

（1）逻辑概念上的问题

真值无法得到，因此严格意义上的误差也无法得到，能得到的只是误差的估计值。误差的概念只能用于已知约定真值的情况。

1、用不确定度评定来代替误差评定的原因(续)

（2）评定方法问题

由于随机误差和系统误差是两个性质不同的量，前者用标准偏差表示，后者则用可能产生的最大误差来表示，在数学上无法解决两者之间的合成方法问题。不仅各国之间不一致，在不同领域中采用的方法也不完全相同。

2、测量不确定度评定与表示的应用范围

(1)建立国家基准、计量标准及其国际比对；

(2)标准物质、标准参考数据；

(3)测量方法、检定规程、检定系统和校准规范等；

(4)科学研究和工程领域的测量；

2、测量不确定度评定与表示的应用范围(续)

(5)计量认证、计量确认、质量认证以及实验室认可；

(6)测量仪器的校准和检定；

(7)生产过程的质量保证以及产品的检验和测试；

(8)贸易结算、医疗卫生、安全防护、环境检测及资源测量。

3、测量结果、误差、准确度的定义

测量结果是被测量的最佳估值,不是真值!

（1） 测量结果

由测量所得到的赋予被测量的值。

注:

(1) 在给出测量结果时，应说明它是示值、未修正测量结果或已修正测量结果，还应表明它是否为几个值的平均。

(2) 在测量结果的完整表述中，应包括测量不确定度，必要时还应说明有关影响量的取值范围。

（2） 测量误差

测量误差 ＝ 测量值 — 真值

在不确定度评定中，常称“被测量之值”为“真值”

真值是指与给定的特定量一致的值。当测量不完善时，通常不能获得真值。真值是一个理想概念，常用约定真值代替。

（2） 测量误差(续)

误差表示的是一个差值。

当测量结果大于真值时，误差为正；

当测量结果小于真值时，误差为负。

不是区间，不应当以“±”号的形式出现！

（2） 测量误差(续)

误差＝测量结果－真值

＝测量结果－总体均值＋总体均值－真值

＝随机误差＋系统误差

测量结果＝真值＋误差

＝真值＋随机误差＋系统误差

误差按其性质，可以分为随机误差和系统误差两类。随机误差和系统误差对应于无限多次测量的理想概念，因此可以确定的只是其估计值，也都具有特定的符号！

（3） 测量准确度

测量结果与被测量真值之间的一致程度。

注： 1. 不要用术语"精密度"代替"准确度"。

2. 准确度是一个定性的概念。

鉴于不可能准确地确定真值的大小，因而"准确度"这个术语说明的是测量结果与被测量真值之间的接近程度。所以，准确度实际上是一个定性的概念。

准确度是定性的概念，
不能量化

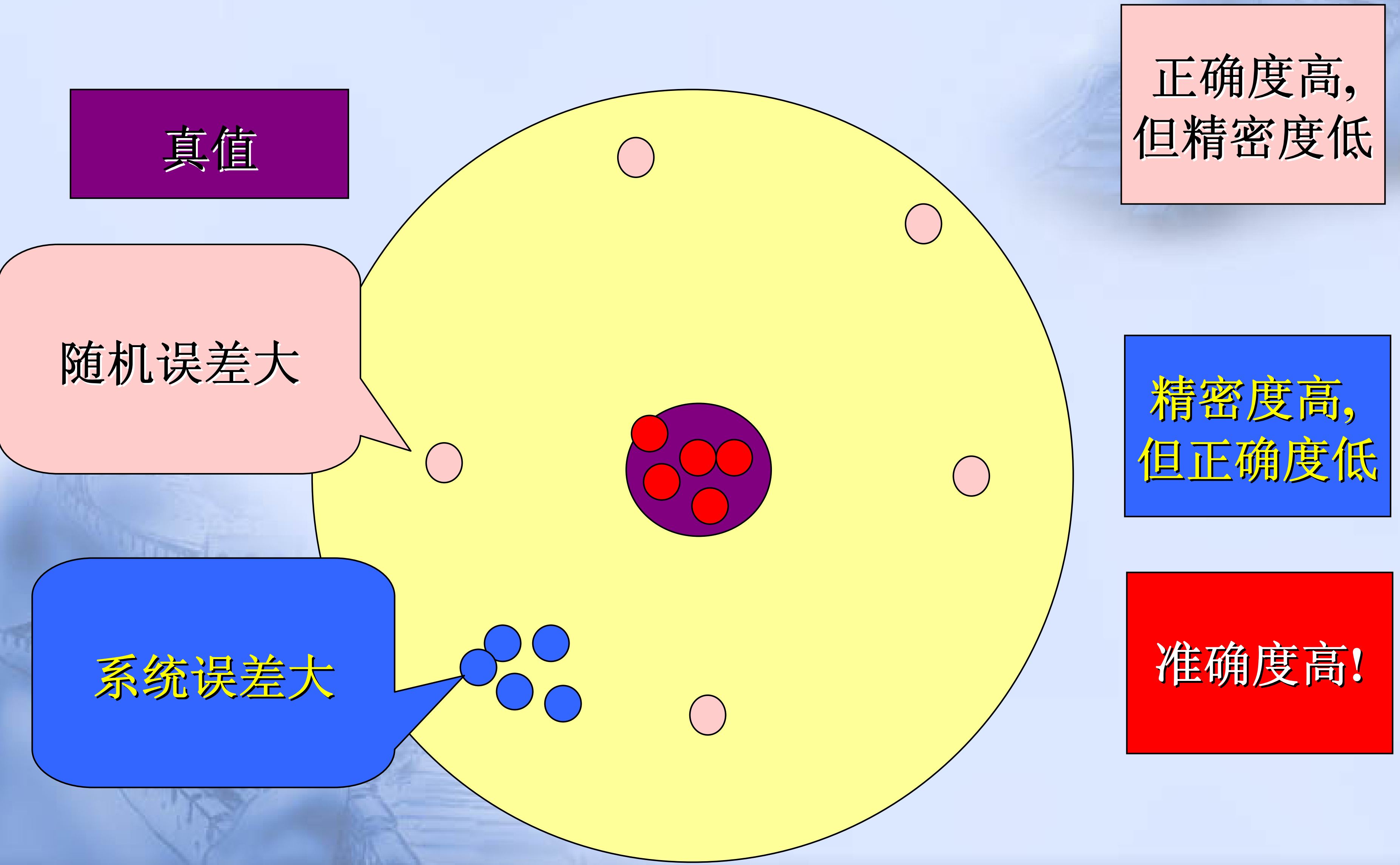


图1.1　正确度、精密度与准确度

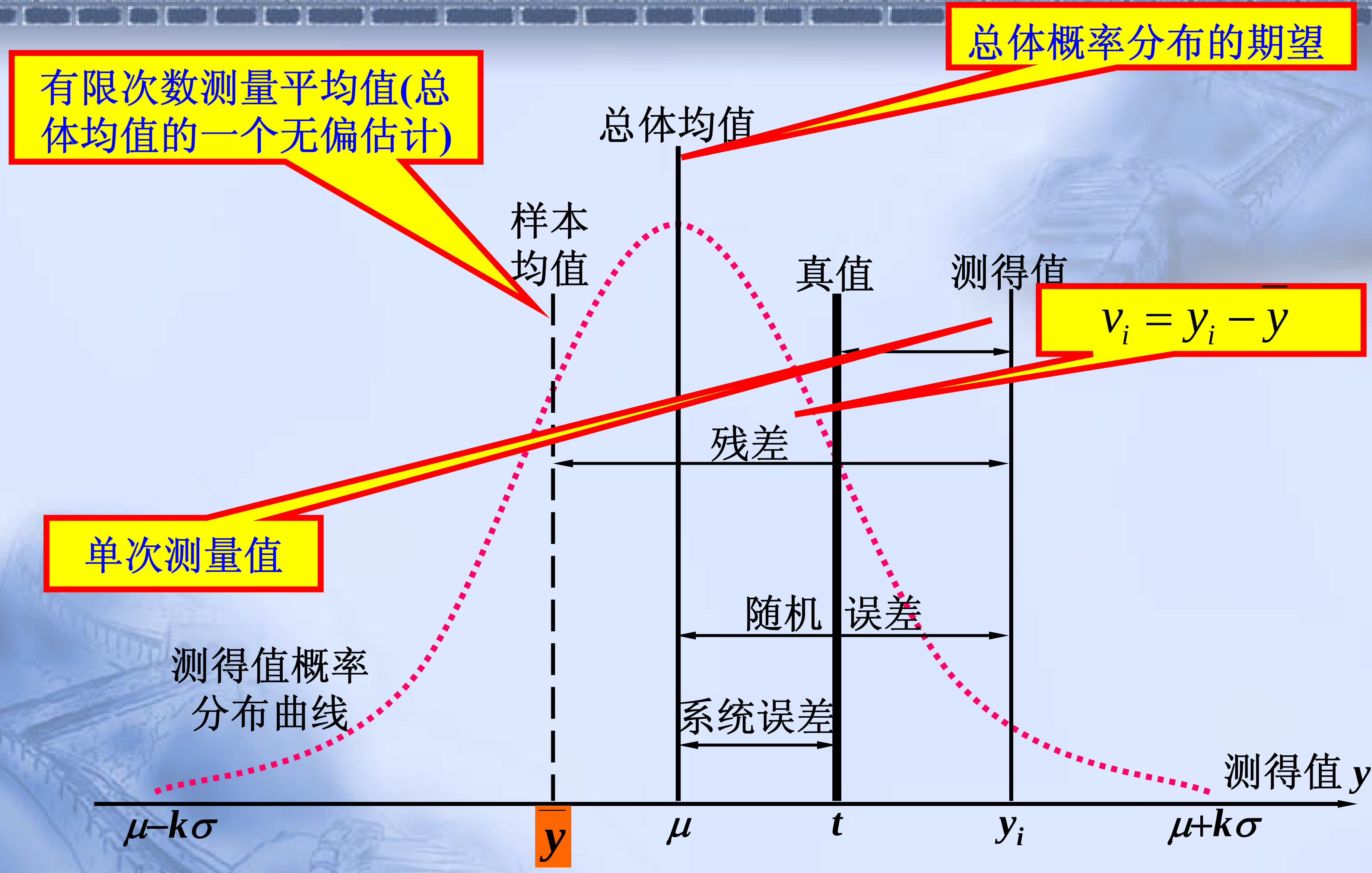

总体概率分布的期望
有限次数测量平均值(总体均值的一个无偏估计)
总体均值
样本均值
真值
测得值
$v_i = y_i - \bar{y}$
残差
单次测量值
随机 误差
测得值概率分布曲线
系统误差
测得值 y
$\mu - k\sigma$
$\bar{y}$
μ
t
y_i
$\mu + k\sigma$

图1.2　测量误差示意图

（4）　测量不确定度

以标准偏差表示的测量不确定度是标准不确定度。

表征合理地赋予被测量之值的分散性，与测量结果相联系的参数。

注：

(1)此参数可以是诸如标准偏差或其倍数，或说明了置信水准的区间的半宽度。

分散性这一“参数”。

对于不对称分布的不确定度，则取其中间值。

（4） 测量不确定度(续)

(2)测量不确定度由多个分量组成。其中一些分量可用测量列结果的统计分布估算，并用实验标准差表征。另一些分量则可用基于经验或其它信息的假定概率分布估算，也可用标准差表征。

“经验的”或“假定概率的分布”说明，不确定度评定带有主观鉴别的成分。也就是说，测量不确定度评定与评定人员的理论知识和实践经验密切相关。所以，定义中使用了“合理地”一词。

（4） 测量不确定度(续)

(3)测量结果应理解为被测量之值的**最佳估计**，而所有的不确定度分量均贡献给了分散性，包括那些由**系统效应**引起的（如，与修正值和参考测量标准有关的）分量。

平均值给出的是“被测量之值”的最佳估计值。

不确定度评定应当考虑已识别的系统效应的影响。即，测量结果是指对已识别的系统效应修正后的最佳估值。

置信区间

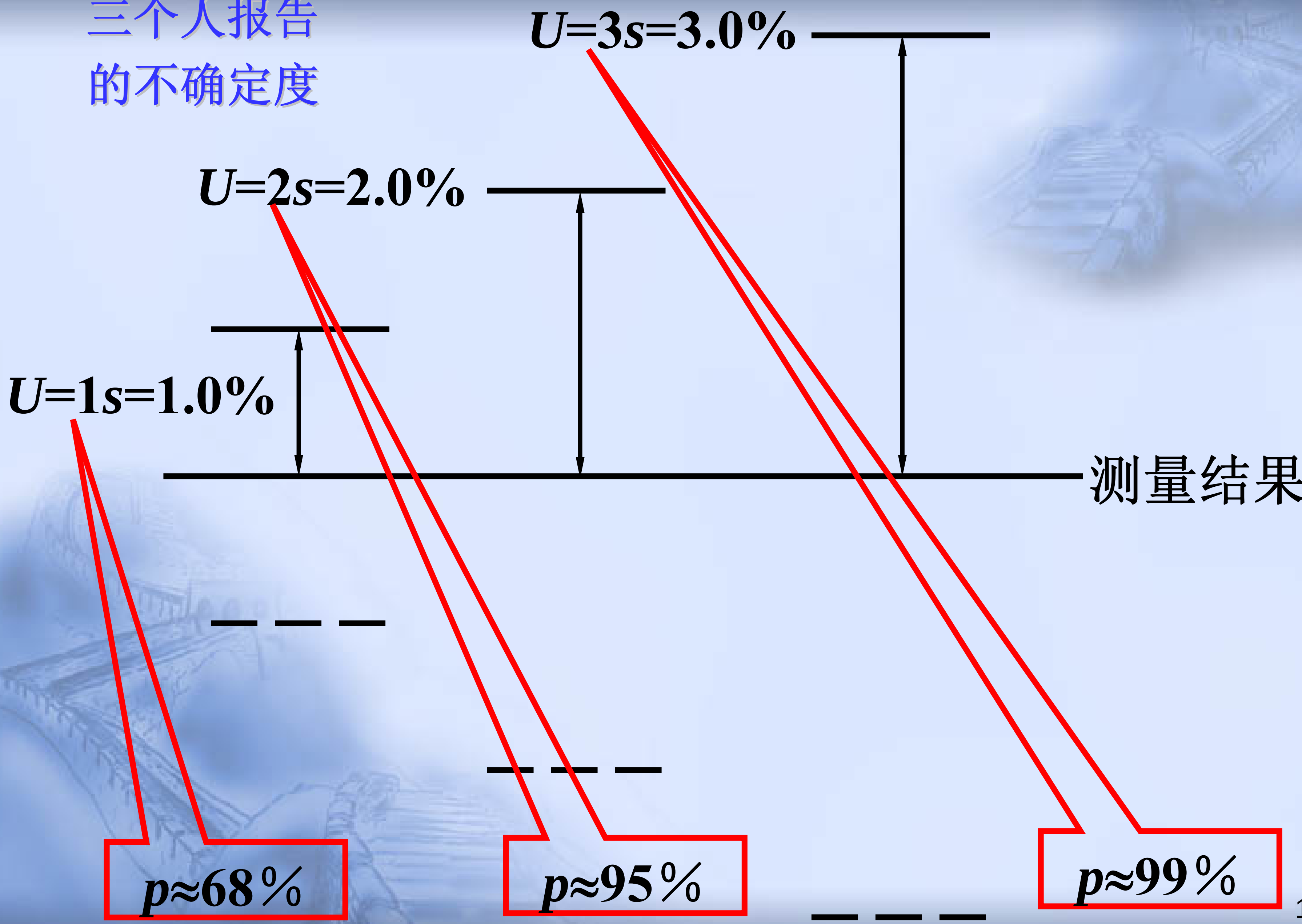
如何理解测量不确定度

置信水准

定义的注（1）指出，测量不确定度是“说明了置信水准的区间的半宽度”。也就是说，测量不确定度需要用两个数来表示：一个是测量不确定度的大小，即置信区间；另一个是置信水准（或称置信概率、包含概率），表明测量结果落在该区间有多大把握。例如：身高为1.8m或加或减0.1m，置信概率为95%。则该结果可以表示为：

1.8m ± 0.1m ，置信概率为95%

三个人报告
的不确定度



什么不是测量不确定度

（1） 操作人员失误不是不确定度。这一类不应计入对不确定度的贡献，应当并可以通过仔细工作和核查来避免发生。

（2） 允差不是不确定度。允差是对工艺、产品或仪器所选定的允许极限值。

（3） 技术条件不是不确定度。技术条件告诉的是对产品或仪器所期望的内容，也包括一些“定性”的质量指标，例如外观。

（4） 准确度（更确切地说，应叫不准确度）不是不确定度。遗憾的是这些术语的使用常被混淆。确切地说，“准确度”是一个定性的术语，诸如人们可能说测量是“准确”的或“不准确”的。

（5） 误差不是不确定度。

（6） 重复性限、复现性限（再现性限）不是不确定度。

它们可能是不确定度的来源

4、测量误差与不确定度的主要区别

(表1.1)

序号	含义	测量误差	测量不确定度
1	定义	测量误差用来定量表示测量结果与真值的偏离大小。“测量结果减去被测量的真值”。 测量误差是一个确定的值。在数轴上表示为一个点。	测量不确定度用来定量表示测量结果的可信程度。 “表征合理地赋予被测量之值的分散性，与测量结果相联系的参数”。 测量不确定度是一个区间。 可以用诸如标准偏差或其倍数，或说明了置信水准的区间的半宽度表示。
2	分类	按出现在测量结果中的规律分类。分为系统误差和随机误差，它们都是无限多次测量下的理想概念。	按评定方法分类：用测量列结果的统计分布评定不确定度的方法称为A类评定方法，并用实验标准偏差表征；用基于经验或其他信息的假定概率分布评定方法称为B类评定方法，也可用标准偏差表征。

续表1.1 测量误差与不确定度的主要区别

序号	含义	测量误差	测量不确定度
3	可操作性	由于真值未知，所以不能得到测量误差的值。当用约定真值代替真值时，可以得到测量误差的估计值。 没有统一的评定方法。	可以根据实验、资料、理论分析和经验等信息进行分析评定，合理确定测量不确定度的置信区间和置信水准(或置信水平或置信概率)。 由权威国际组织制定了测量不确定度评定和表示的统一方法**GUM**，具有较强的可操作性。 不同技术领域的测量不尽相同，有其特殊性，可以在**GUM**的框架下制定相应的评定方法。
4	表述方法	是一个带符号的确定的数值，非正即负（或零），不能用正负号(±)表示。	约定为(置信)区间半宽度，恒为正值。当由方差求得时，取其正平方根值。 完整的表述应包括两个部分：测量结果的置信区间(测量结果不确定度的大小)，以及测量结果落在该置信区间内的置信概率(或置信水平或置信水准)。

续表1.1 测量误差与不确定度的主要区别

序号	含义	测量误差	测量不确定度
5	合成方法	误差等于系统误差加随机误差。 由各误差分量的代数和得到。	当不确定度各分量彼此独立无关时，用方和根方法合成，否则要考虑相关项。
6	结果修正	可以用已知误差对未修正测量结果进行修正，得到已修正测量结果。	不能用测量不确定度修正测量结果。对已修正测量结果进行测量不确定度评定时，应评定修正不完善引入的不确定度
7	实验标准差	来源于给定的测量结果，它并不表示被测量估计值的随机误差。	来源于合理赋予的被测量的值，表示同一观测列中，任一估计值的标准不确定度。

续表1.1 测量误差与不确定度的主要区别

序号	含义	测量误差	测量不确定度
8	结果说明	测量误差用来定量表示测量结果与真值的偏离大小。 误差是客观存在且不以人的认识程度而转移。 误差属于给定的测量结果，相同的测量结果具有相同的误差，而与得到该测量结果的测量设备、测量方法和测量程序无关。	测量不确定度用来定量表示测量结果的可信程度。 测量不确定度与人们对被测量、影响量，以及测量过程的认识有关。 在相同条件下进行测量时，合理赋予被测量的任何值，都具有相同的测量不确定度，即测量不确定度与测量方法有关。
9	自由度	不存在。	可作为不确定度评定可靠程度的指标。自由度是与不确定度的相对标准不确定度有关的参数。
10	置信概率	不存在。	当了解分布时，可按置信概率给出置信区间。

（二）示值误差、允差与不确定度

测量仪器的性能可以用示值误差和最大允许误差来表示。

测量仪器示值与对应输入量的真值之差。

对给定测量仪器，规范、规程等所允许的误差极限值。

测量仪器的示值误差

示值误差＝示值－对应输入量的真值

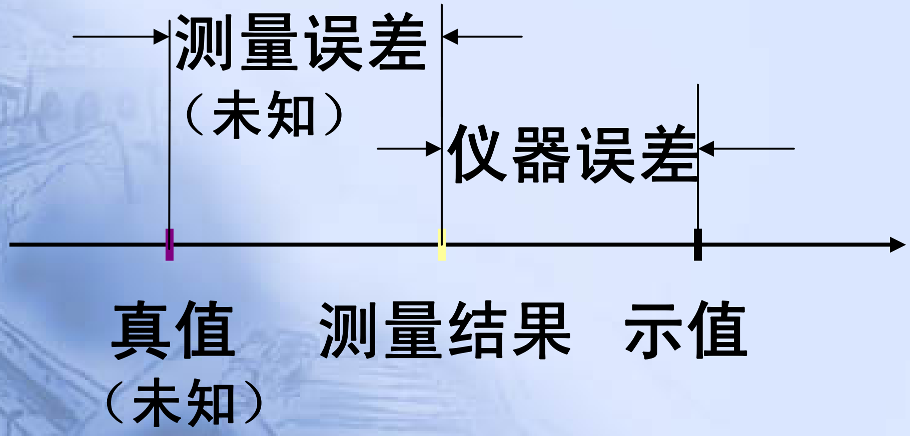
同型号的不同仪器，他们的示值误差一般是不同的。一台仪器的示值误差必须通过检定或校准才能获得，正因为如此，才需要对每一台仪器进行检定或校准。

已知某仪器的示值误差后，就可对其测量结果进行修正，示值误差反号就是该仪器的修正值。修正后结果的不确定度就与修正值本身的不确定度有关，也就是说，与检定或校准所得到的示值误差的不确定度有关。

仪器误差与测量误差的区别

仪器误差=示值-（用测量标准测得的）测量结果

测量误差=测量结果-真值



最大允许误差

在技术规范、规程中规定的测量仪器允许误差极限，称为“最大允许误差”或“允许误差限”，俗称“允差”，简写为MPE或mpe，可在仪器说明书中查到。

允差是制造厂对某种型号仪器所规定的示值误差的允许范围，不是某台仪器实际存在的误差，也不是通过检定或校准得到的，因而不能作为修正值使用。

最大允许误差(续)

MPE通常带有"±"号。一般可以用绝对误差、相对误差、引用误差或他们的组合形式表示。例如，可以表示为±**0.1**μ**V**，±**1.5** μ**m**，±**1**%，±**1**×**10**$^{-6}$满度，±（**0.l**%×读数＋**0.1ns**）等。

MPE本身不是测量不确定度，它给出仪器示值误差的合格区间，因而可以作为评定测量不确定度的依据。当直接使用仪器的示值作为测量结果时，由仪器引入的标准不确定度分量，可以根据该型号仪器的**MPE**按**B**类评定方法得到。

最大允许误差(续)

测量仪器的准确度被定义为“测量仪器给出接近于真值的响应能力”。在定义的注中指出，准确度是定性的概念。

值得指出的是:目前不少仪器说明书上给出的定量表示的准确度（通常还带有“±”号），实际上是该型号仪器的最大允许误差。

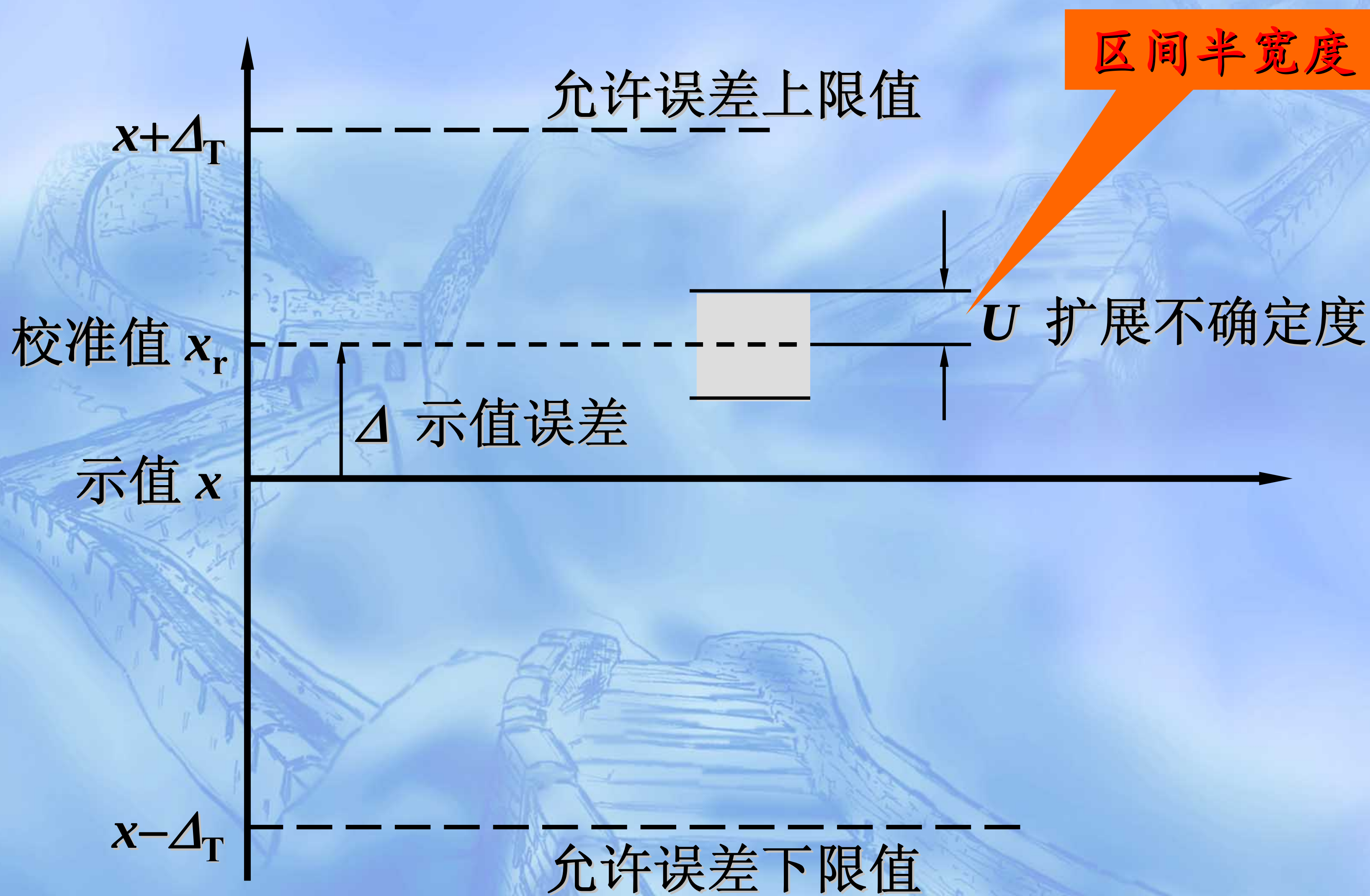


图1.3 示值误差Δ、允许误差Δ_T、测量不确定度U的关系

二、测量不确定度评定与表示

（一）相关数理统计基本知识
（二）测量不确定度有关概念
（三）产生测量不确定度的原因测量模型化
（四）标准不确定度的A类评定
（五）标准不确定度的B类评定
（六）合成标准不确定度评定
（七）扩展不确定度评定
（八）测量结果及其不确定度报告

（一）相关数理统计基本知识

基本统计计算

通过多次重复测量并进行某些统计计算，可增加测量得到的信息量。其中有两项最基本的统计计算：

（1）求一组数据的平均值或算术平均值（理论上是数学期望），

（2）求单次测量或算术平均值的实验标准偏差（理论上是总体标准偏差）。

1. 最佳估值------多次测量的平均值

一般而言，测量数值越多，得到的“真值”的估计值就越好。理想的估计值应当用无穷多数值集来求平均值。但是增加读数要做额外的工作，并增大测量成本，且会产生“缩小回报”的效果。什么是合理的次数呢？10次是普遍选择的，因为这能使计算容易。20次读数只比10次给出稍好的估计值，50次只比20次稍好。根据经验通常取6～10次读数就足够了。

数学期望

2. 分散范围（区间）— 标准偏差

- 定量给出分散范围的常见形式是标准偏差。一个数集的标准偏差给出了各个读数与该组读数平均值之差的典型值。

方差的平方根

- 根据“经验”，全部读数大概有三分之二（68%）会落在平均值的正负（±）一倍标准偏差范围内，大概有全部读数的95%会落在正负两倍标准偏差范围内。虽然这种“尺度”并非普遍适用，但应用广泛。标准偏差的“真值”只能从一组非常大（无穷多）的读数求出。由有限个数的读数所求得的只是标准偏差的估计值，称为实验标准偏差或估计的标准偏差，用符号s表示。

3. 分布-------数据散布的“形状”

一组数值的散布会取不同的形式，或称为服从不同的概率分布。

参见JJF 1059-1999 第24页 附录A

（1） 正态分布

在一组读数中，较多的读数值靠近平均值，少数读数值离平均值较远。这就是正态分布或高斯分布的特征。

（2） t分布

是一般形式，而标准正态分布是其特殊形式，$t(\nu)$成为正态分布的条件是自由度$\nu\to\infty$。

（3） 均匀分布（矩形分布）

当测量值非常平均地散布在最大值和最小值之间的范围内时，就产生了矩形分布或称为均匀分布。

（4） 其他分布

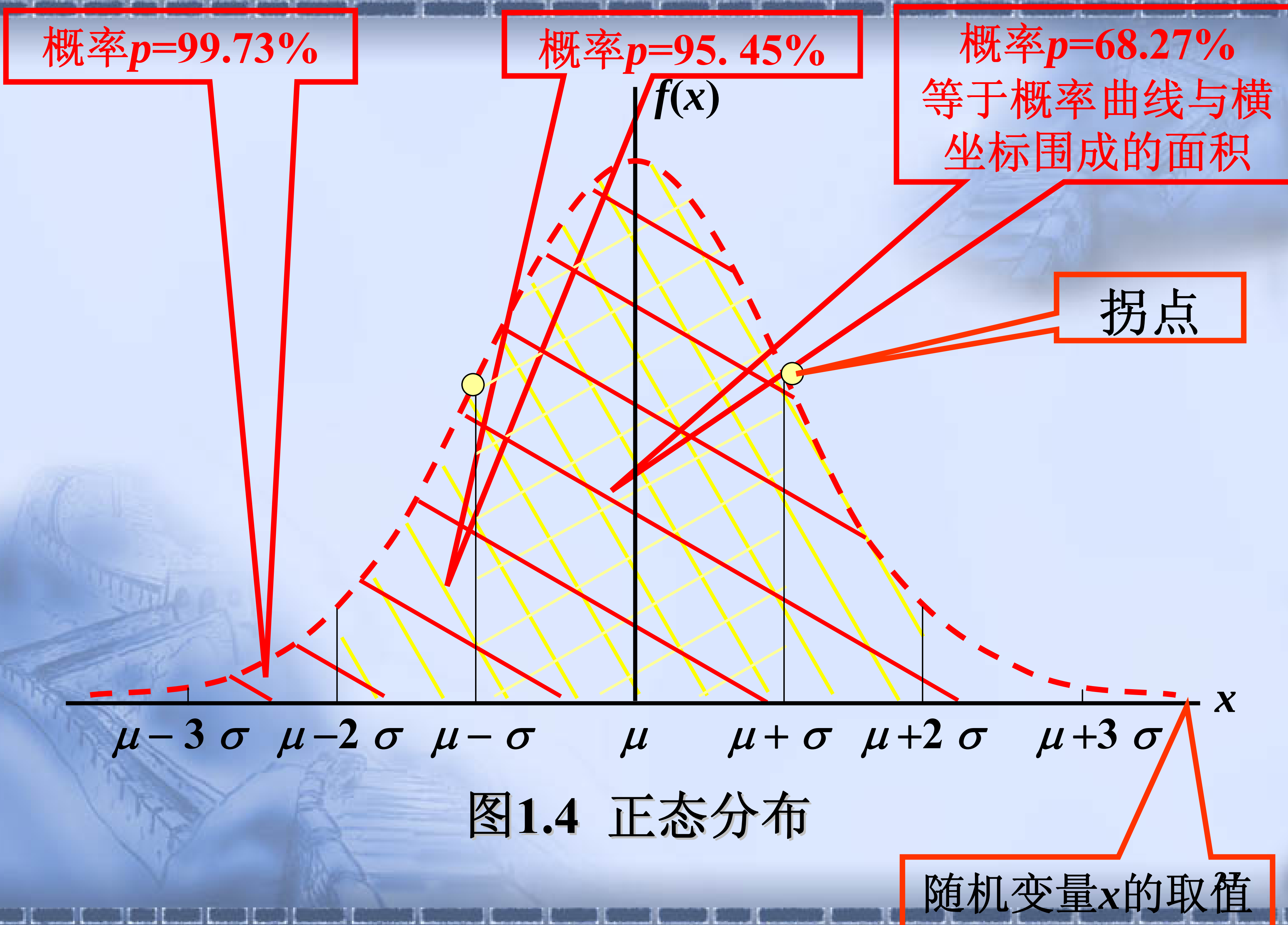

概率p=99.73%
概率p=95. 45%
概率p=68.27%
等于概率曲线与横坐标围成的面积
f(x)
拐点
x
μ−3σ
μ−2σ
μ−σ
μ
μ+σ
μ+2σ
μ+3σ
随机变量x的取值

图1.4 正态分布

平均值(最佳估计值)

正态分布

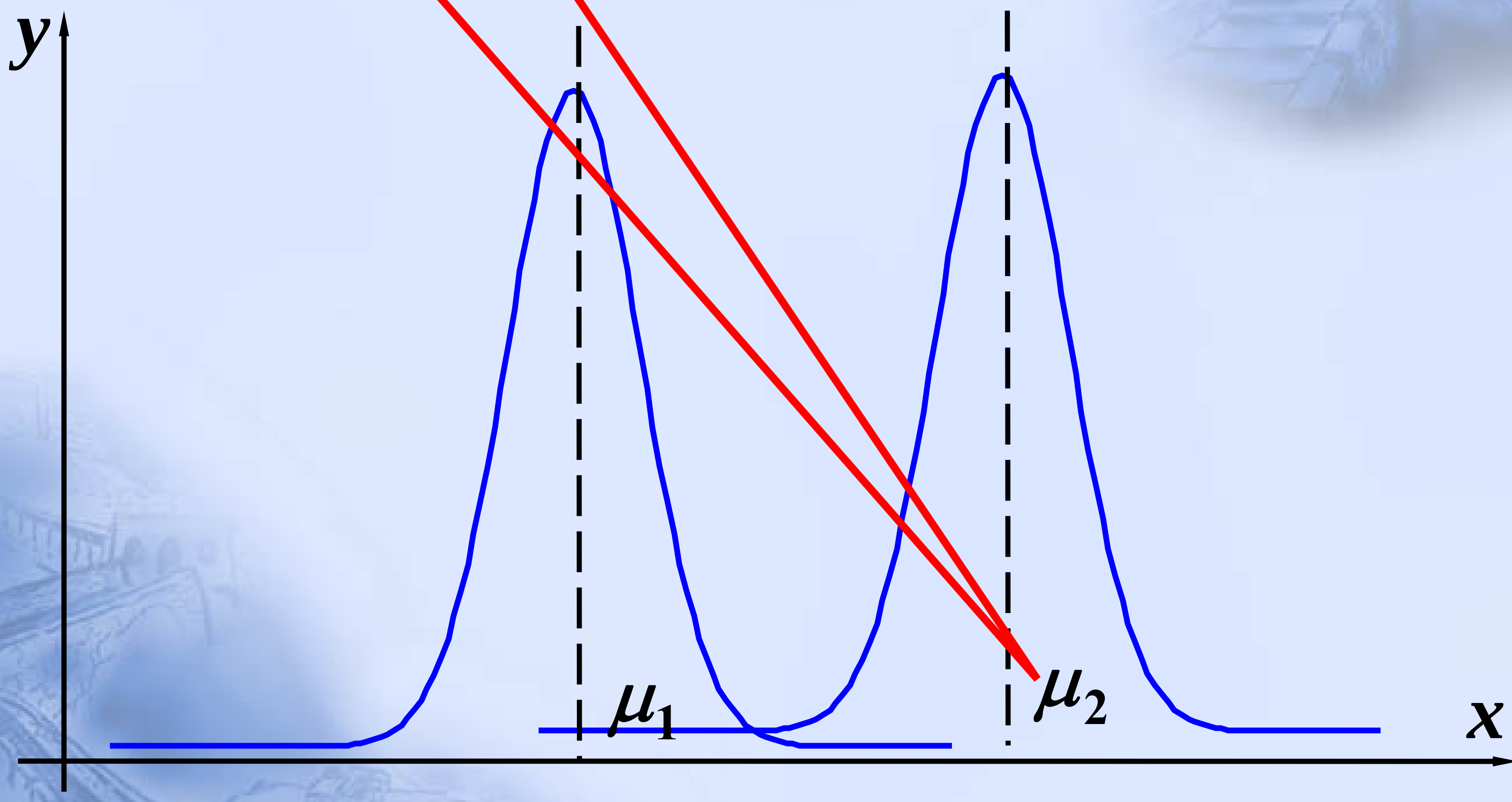


图1.5　正态分布的中心在$x=\mu$处，μ值的大小决定了曲线在x上的位置。

正态分布

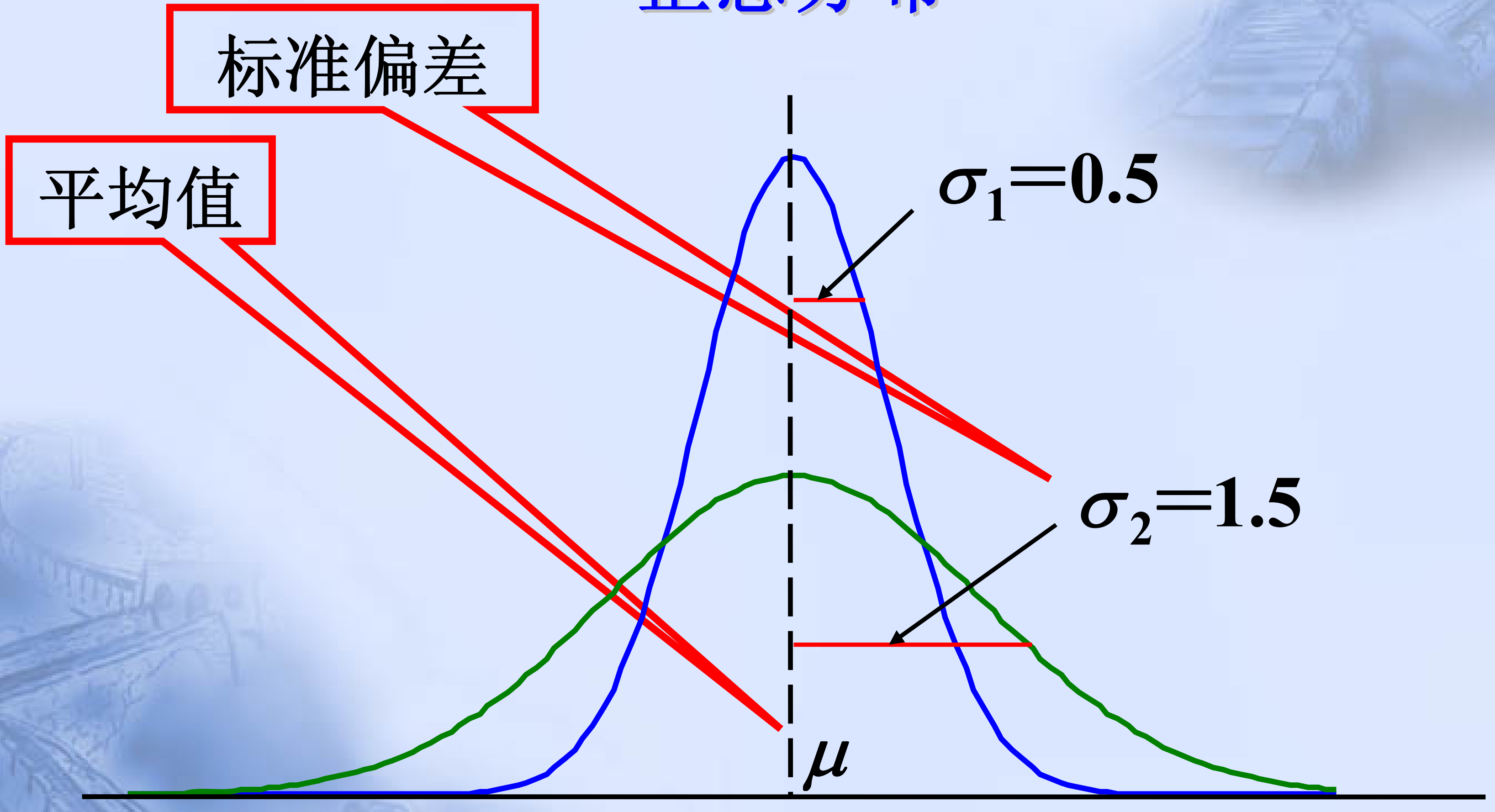


图1.6 在相同μ值下，σ值愈大，曲线愈平坦，即测量值的分散性愈大。

正态分布

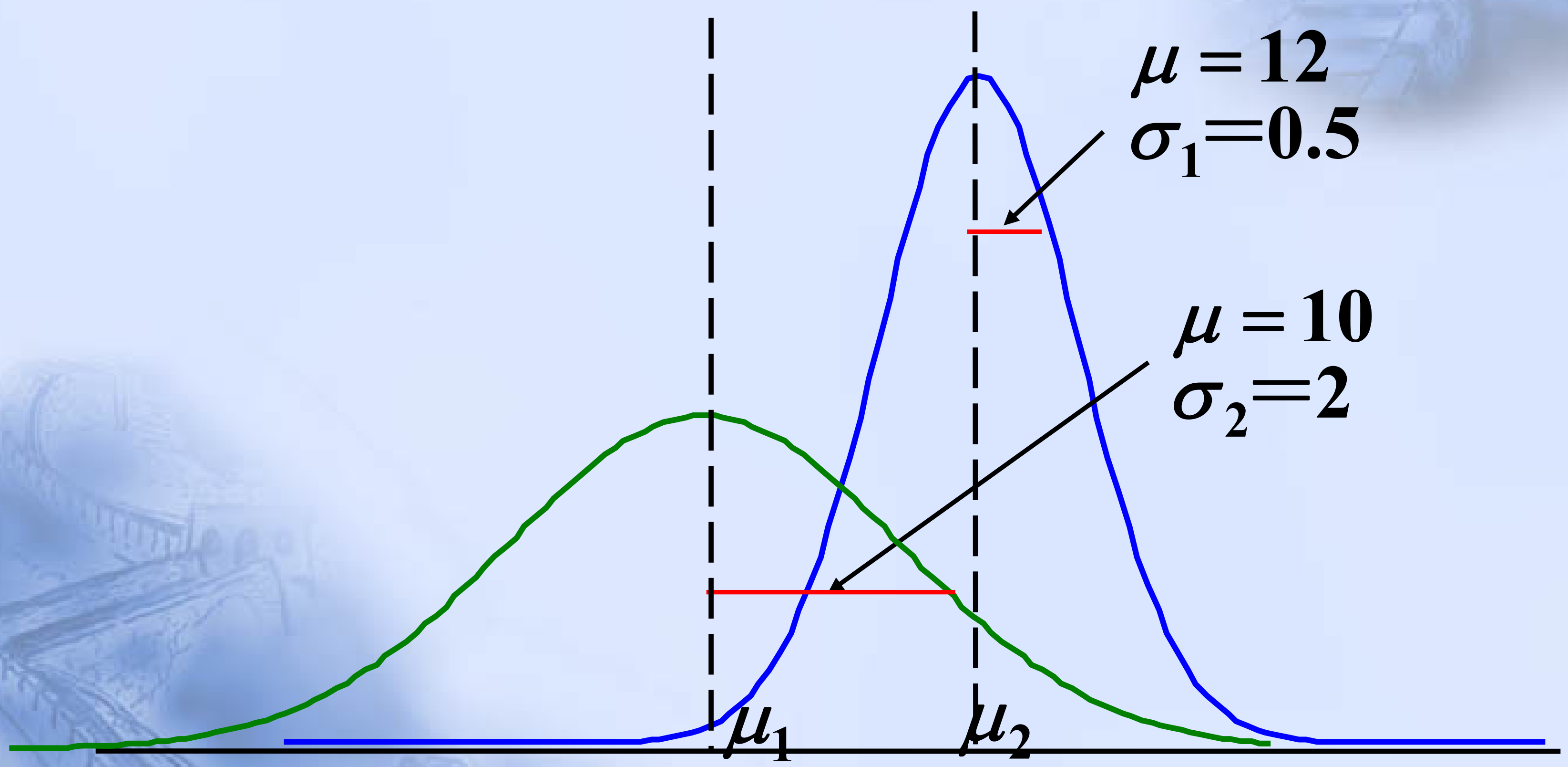


图1.7 对两条相同μ值和不同σ值的正态分布曲线的比较。

正态分布

重复条件下多次测量所得数据的分布服从正态分布(如图2.4所示)。正态分布的概率密度曲线，该曲线有如下四个特点：

① 单峰性，即曲线在平均值μ处具有最大值；

② 对称性，即曲线具有一对称轴；

③ 有一水平渐近线，即曲线两端无限接近于横轴；

④ 在对称轴左右两边的曲线上离对称轴等距离的某处，各有一个拐点。

$\mu-\sigma$ 和 $\mu+\sigma$

数据对称分布在平均值的两边

① 置信水准(置信概率、置信水平)以p表示;

② 显著性水平(置信度)以α表示， $\alpha = 1 - p$;

③ 置信区间以$[-k\sigma, k\sigma]$表示;

④ 置信因子(包含因子)以k表示，当分布不同时，k值也不同。

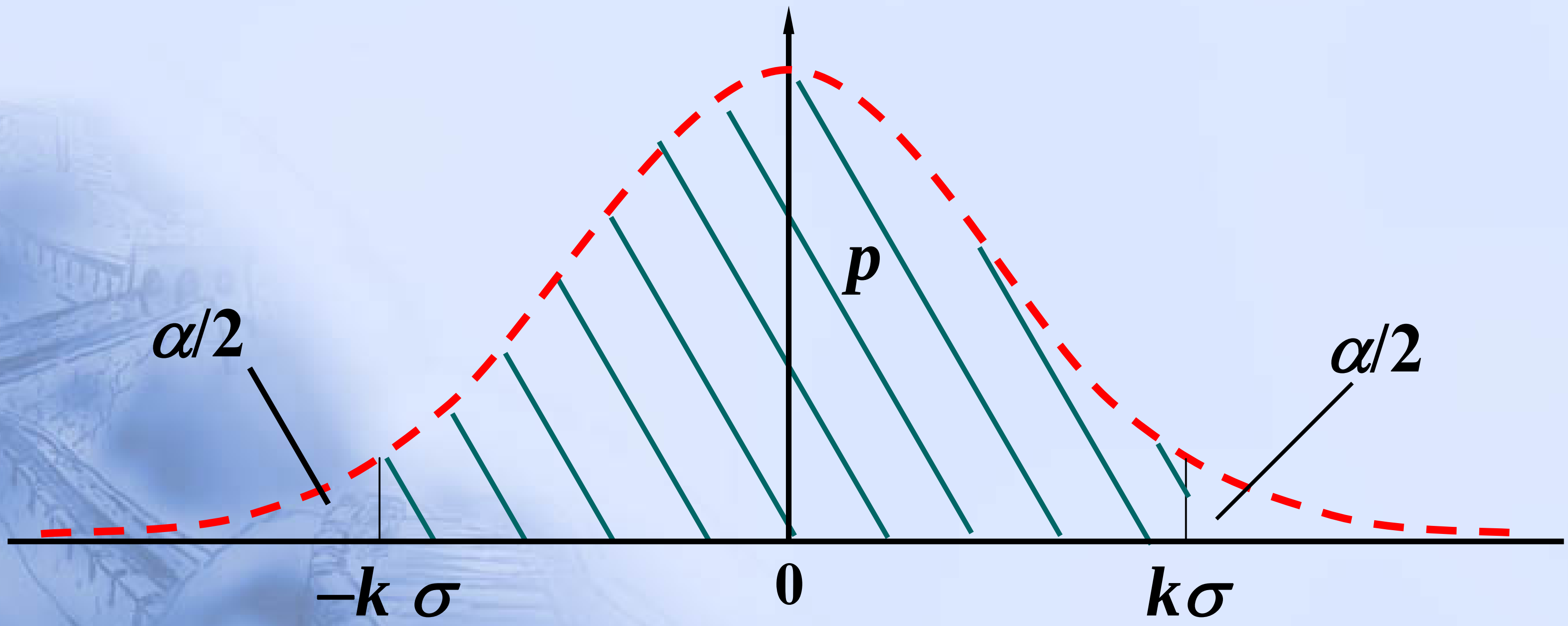


图1.8 统计分布常见术语图解

符合下列条件之一者，一般可近似地估计为正态分布：

(1) 重复性条件或复现性条件下多次测量的算术平均值的分布；

(2) 被测量Y用扩展不确定度U_p给出，而对其分布又没有特殊指明时，估计值Y的分布；

(3) 被测量Y的合成标准不确定度$u_c(y)$中，相互独立的分量$u_i(y)$较多，它们之间的大小也比较接近时，Y的分布；

(4) 被测量Y的合成标准不确定度$u_c(y)$中，相互独立的分量$u_i(y)$中，存在两个界限值接近的三角分布，或4个限值接近的均匀分布时；

(5) 被测量Y的合成标准不确定度$u_c(y)$相互独立的分量中，量值较大的分量(起决定作用的分量)接近正态分布时。

各种不同分布的概率和包含因子

表1.2　正态分布k，p对应值

p(%)	50	68.27	90	95	95.45	99	99.73
k	0.67	1	1.65	1.96	2	2.58	3

对于均匀分布，包含因子 $k=\sqrt{3}$

对于三角分布，包含因子 $k=\sqrt{6}$

对于反正弦分布，包含因子 $k=\sqrt{2}$

（二）测量不确定度有关概念

测量不确定度

表征合理地赋予被测量之值的分散性，与测量结果相联系的参数。

不确定度可以是诸如标准偏差或其倍数，或说明了置信水准的区间的半宽度。

标准不确定度和扩展不确定度

- 以标准偏差表示的不确定度称为标准不确定度，以u表示。

- 以标准偏差倍数表示的不确定度称为扩展不确定度，以U表示。扩展不确定度表明了具有较大置信概率的区间半宽度。

不确定度A类和B类评定方法

不确定度通常由多个分量组成，对每一分量都要求评定其标准不确定度。评定方法分为A、B两大类：

- A类评定是用对观测列进行统计分析的方法，以实验标准偏差表征；
- B类评定则用不同于A类的其他方法，以估计的标准偏差表示。
- 各标准不确定度分量的合成称为合成标准不确定度，它是测量结果的标准偏差的估计值。

表1.3 标准不确定度A类评定与B类评定的比较

标准不确定度A类评定	标准不确定度B类评定
根据一组测量数据	根据信息来源
可能性	可信性
来源于随机效应	来源于系统效应
通常为数学家的研究范畴	通常是物理学家的研究范畴

标准不确定度

定义：

以标准偏差表示的测量不确定度。

用符号*u*表示。也可以用相对不确定度

$$u_{\mathrm{Arel}}=\frac{u(x)}{|x|}(x\neq 0)$$

表示，*x*是被测量*X*的最佳估值。

JJF 1059-1999　第5页

合成标准不确定度

定义：

当测量结果是由若干个其它量的值求得时，按其它各量的方差和协方差算得的标准不确定度。

用符号u_c表示。也可以用相对不确定度

$$u_{crel} = \frac{u_c(y)}{|y|} (y \neq 0)$$

表示，y是被测量Y的最佳估值。

JJF 1059-1999 第5页

扩展不确定度

定义：

确定测量结果区间的量，合理赋予被测量之值分布的大部分可望含于此区间。

用大写斜体英文字母*U*表示。也可以用相对不确定度表示，

$$U_{\mathrm{rel}} = \frac{U}{|y|} (y \neq 0)$$

*y*是被测量*Y*的测量结果。

JJF 1059-1999　第5页

包含因子*k*

定义： 为求得扩展不确定度，对合成标准不确定度所乘之数字因子。

注：1. 包含因子等于扩展不确定度与合成标准不确定度之比。

2. 包含因子有时也称覆盖因子。

3. 根据其含义可分为两种：

$$k=U/u_c；\ k_p=U/u_c。$$

4. 一般在2~3之间。

5. 下标*p*为置信概率，即置信区间所需之概率。

JJF 1059-1999 第5页

测量不确定度的结构

小写英文字母
u(斜体)表示

大写英文字母
U(斜体)表示

测量不确定度
- 标准不确定度
  - A类标准不确定度
  - B类标准不确定度
  - } 合成标准不确定度
- 扩展不确定度
  - ***U***（当无需给出U_p时,***k*=2~3**）
  - U_p（***p***为置信概率）

实验标准(偏)差计算式 —— 贝塞尔公式

对同一被测量X作n次测量，表征每次测量结果分散性的量$s(x_i)$可按下式算出：

$$s(x_i)=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}$$

式中x_i为第i次测量的结果；$\bar{x}$ 为所考虑的n次测量结果的算术平均值；$v_i=x_i-\bar{x}$ 称为残差。

上式称作贝塞尔公式，它描述了各个测量值的分散度。有时将$s(x_i)$称作单次测量结果的标准偏差，或称为实验标准差。

自由度ν

在方差计算中，自由度为和的项数减去和的限制数，记为ν。在重复条件下对被测量做n次独立测量，其样本方差为：

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

式中v_i为残差。所以在方差的计算式中，和的项数即为残差v_i的个数n。而且残差之和为零，即$\sum v_i=0$是限制条件，故限制数为1，因此可得

自由度$\nu=n-1$。

自由度ν（续）

不确定度u的相对标准不确定度$\sigma(u)/u$与自由度有如下关系

$$\frac{\sigma(u)}{u}=\frac{1}{\sqrt{2\nu}}$$

可见式中ν为愈大，$\sigma(u)/u$愈小，故自由度反映了相应标准不确定度的可靠程度。

合成标准不确定度的自由度称为有效自由度，用ν_{eff}表示。

（三）不确定度的来原因与测量模型化

不确定度来源

（1） 对被测量的定义不完整或不完善；

（2） 实现被测量定义的方法不理想；

（3） 取样的代表性不够，即被测量的样本不能完全代表所定义的被测量；

（4） 对测量过程受环境影响的认识不周全，或对环境条件的测量与控制不完善；

（5） 对模拟式仪器的读数存在人为偏差（偏移）；测量仪器计量性能（如灵敏度、鉴别力阈、分辨力、稳定性及死区等）的局限性；

（7） 赋予计量标准的值或标准物质的值不准确；

（8） 引用的数据或其他参数的不确定度；

（9） 与测量方法和测量程序有关的近似性和假定性；

（10）被测量重复观测值的变化等等。

建立数学模型

在多数情况下，被测量Y（输出量）不能直接测得，而是由N个其他量X_1，X_2，…，X_N通过函数关系f来确定：

$$Y=f(X_1，X_2，…，X_N)$$

上式称为测量模型或数学模型，或称为测量过程数学模型。

输出量Y的输入量X_1，X_2，…，X_N本身可看作被测量，也可取决于其他量，甚至包括具有系统效应的修正值，从而可能导出一个十分复杂的函数关系式，以至函数f不能用显式表示。

Y也可以用实验的方法确定，甚至只用数值方程给出。上式也可能简单到$Y=X_1+X_2$，甚至$Y=X$。

建立数学模型(续)

在数学模型中，输入量X_1，X_2，…，X_N可以是：

(1) 由当前直接测量的量。其值与不确定度可得自单一观测、重复观测、依据经验对信息的估计，并可包含测量仪器读数的修正值，以及对周围环境温度、大气压、湿度等影响量的修正值。

(2) 由外部来源引入的量。如已校准的测量标准、测量仪器、有证标准物质、手册所得的测量值或参考数据。

(3) x_i的不确定度是y的不确定度来源。寻找不确定度来源时，可以从测量仪器、测量环境、测量人员、测量方法、被测量等各方面考虑。应做到不遗漏、不重复，特别要考虑对测量结果影响大的不确定度来源。

(4) y的不确定度来源取决于x_i的不确定度，为此首先必须评定x_i的标准不确定度$u(x_i)$。

求最佳估值(续)

需要指出，对于测量值来说，最佳值应是修正了已识别的系统效应和剔除了异常值的平均值。

最后需要指出，求最佳估值是测量不确定度评定必不可少的一个步骤。一方面是因为报告测量结果和报告测量结果的不确定度需要给出最佳值；

同时，计算相对不确定度也需要有最佳值：相对不确定度等于不确定度除以最佳值的绝对值。

求最佳估值

如果被测量*Y*的估计值为*y*，输入量X_i的估计值为x_i，则有: $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

可以用两种方法用输入量X_1，X_2，…，X_n的估计值x_1，x_2，…，x_n求取被测量*Y*的最佳估值*y*。

方法（1）：

$$y = \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_{1k}, x_{2k}, \cdots, x_{Nk})$$

式中，*y*是取*Y*的*n*次独立观测值y_k的算术平均值。每个y_k的不确定度相同。

求最佳估值（续）

方法（2）：

$$y = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_N)$$

式中 $\bar{x}_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ik}$ 是X的n次独立观测值x_{ik}的算术平均值。这一方法的实质是先求X_i的最佳估计值 $\bar{x}_i$ ，再通过函数关系式得出y 。

建议采用方法（1）求取被测量Y的最佳估计值y。

不确定度传播率

利用不确定度传播率可列出各标准不确定度分量的表示式。

若被测量（输出量）$Y=f(X_1, X_2, \ldots, X_N)$的估计值为$y=f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$，则$y$的合成标准不确定度$u_c(y)$由相关输入量$X_1, X_2, \ldots, X_N$的估计值$x_1, x_2, \ldots, x_N$的标准不确定度所决定：

$$
\begin{aligned}
u_c^2(y) &= \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i, x_j) \\
&= \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\gamma(x_i, x_j)u(x_i)u(x_j)
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

不确定度传播率(续)

上式称为不确定度传播率，其中 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ 称为标准不确定度的传播系数或灵敏系数；$u(x_i)$分别为输入量X_i的估计值x_i的标准不确定度

$u(x_i,x_j)=u(x_j,x_i)$ 称为两输入量的估计值x_i和x_j的协方差函数。

各输入估计值 x_i及其标准不确定度 $u(x_i)$得自输入量X_i的可能值的概率分布。

（四）标准不确定度A类评定

1、基本方法（单次测量结果实验标准差与平均值实验标准差）

对被测量*X*，在重复条件下或复现性条件下进行*n*次独立重复观测，观测值为$x_i(i=1,2,\ldots,n)$。其算术平均值 $\bar{x}$ 为

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$s(x_i)$为单次测量的实验标准差，由贝塞尔公式得到

$$s(x_i)=\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}v_i^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}$$

实验标准(偏)差计算式 —贝塞尔公式

$$s(x_i)=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}$$

式中：x_i——第i次测量的结果;

$\bar{x}$——n次测量结果的算术平均值;

$v_i = x_i - \bar{x}$ ——残差。

贝塞尔公式的数学意义

贝塞尔公式描述了各个测量值的分散度。如果*x*不随时间变化，贝塞尔公式是一个收敛的级数:

$$当n \to \infty时，s(x_i) \to 稳定值$$

贝塞尔公式的物理意义

固有的就是不变的

自由度越大

对于规范化的常规测量系统，也就是说按照技术标准/规范/规程建立的测量系统，由贝塞尔公式计算给出的单次测量结果实验标准差$s(x_i)$，是该测量系统的一个固有特性。$s(x_i)$与该测量系统中的测量标准或测量仪器的技术指标一样，是测量系统所固有的。

$s(x_i)$这个测量系统的固有特性可以通过事先进行多次独立重复测量，应用贝塞尔公式求出。$s(x_i)$具有如下特性：

(a) $s(x_i)$不受重复测量次数n的影响；

(b)测量次数n越大，求出的$s(x_i)$越准确可靠。

平均值的标准(偏)差

用下式计算平均值的标准偏差：

$$s(\overline{x})=\frac{s(x_i)}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n\times(n-1)}}$$

需要指出，单次测量的实验标准差 **s(x_i)** 随着测量次数的增加而趋于一个稳定的数值；平均值的标准偏差 $s(\overline{x})$ 则将随着测量次数的增加而减小。

当$n\rightarrow\infty$，$s(\overline{x})\rightarrow 0$。

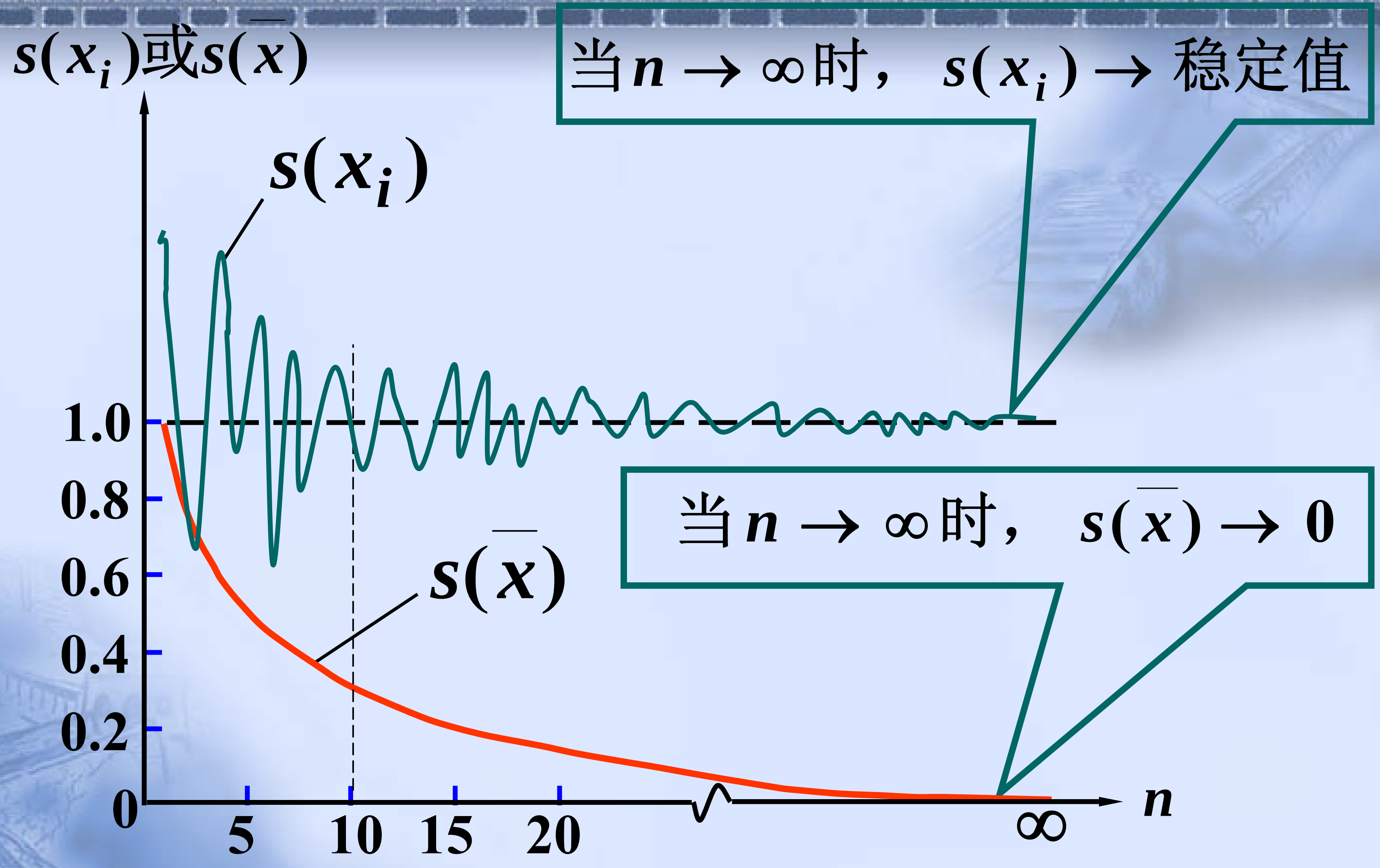


图1.9 $s(x_i)$和$s(\bar{x})$与测量次数n的关系

关于标准不确定度

根据定义，标准不确定度等于一倍标准偏差。所以，当测量结果取任意一次x_i时，对应的A类评定标准不确定度为

$$u(x)=s(x_i)=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{(n-1)}}$$

关于标准不确定度

如果测量结果是取**n**次的算术平均值时，则 $\bar{x}$ 所对应的A类评定标准不确定度为

$$s(\bar{x})=\frac{s(x_i)}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n\times(n-1)}}$$

关于标准不确定度

如果测量结果是取***m***次测量的算术平均值时，则 $\bar{x}_m$ 所对应的**A**类评定标准不确定度为

$$s(\bar{x}_m)=\frac{s(x_i)}{\sqrt{m}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{m\times(n-1)}}$$

$$(1< m<n)$$

标准不确定度A类评定

观测次数*n*充分多，才能使A类不确定度评定可靠，一般认为*n*应大于5。但也要视实际情况而定，当A类不确定度分量对合成标准不确定度的贡献较大时，*n*不宜太小，反之，当A类不确定度分量对合成标准不确定度的贡献较小时*n*小一些关系也不大。

2、实际的标准不确定度A类评定

由实验标准偏差的分析可知，单次测量的实验标准偏差$s(x_i)$是一个特定的被测量和测量方法的固有特性，该特性表征了各单个测得值的分散性。此处所说的测量方法包括测量原理、测量设备、测量条件、测量程序以及数据处理程序等。在重复性条件下或复现性条件下进行规范化常规测量，通常不需要每次测量都进行A类标准不确定度评定，可以直接引用预先评定的结果。

所谓规范化常规测量，是指明确规定了方法、程序、条件的测量，如已通过实验室认可的检测或校准项目的测量。如果事先对某被测量X进行n次独立重复测量，其实验标准差为$s(x_i)$。若随后的规范化常规测量只是由一次测量就直接给出测量结果，则该测量结果的标准不确定度$u(x)$就等于事先评定的实验标准差$s(x_i)$，即$u(x)= s(x_i)$。如果随后的测量进行了几次测量(典型情况是$n'=3$)，而且将n'次测量的平均值作为结果提供给客户，则算术平均值的实验标准差应等于实验标准差$s(x_i)$除以次数n'的平方根，相应的标准不确定度为

$$u(\bar{x})=s(\bar{x})=\frac{s(x_i)}{\sqrt{n'}}$$

实例：

某实验室事先对某一电流量进行$n=10$次重复测量，测量值列于表2.4。由贝塞尔公式计算得到单次测量的估计标准偏差$s(x)=0.074$mA。

① 在同一系统中在以后做单次（$n'=1$）测量， 测量值$x=46.3$mA，求这次测量的标准不确定度$u(x)$。

② 在同一系统中在以后做3（$n'=3$）次测量，求这3次测量结果的标准不确定度 $u(\bar{x})$。

$$\bar{x}=\frac{45.4+45.3+45.5}{3}=45.4\text{mA}$$

表1.4 对某一电流量进行n＝10次重复测量的测量值

次数i	1	2	3	4	5
测量值 mA	46.4	46.5	46.4	46.3	46.5
次数i	6	7	8	9	10
测量值 mA	46.3	46.3	46.4	46.4	46.4
平均值	46.39mA				
单次测量的标准偏差$s(x)$	0.074mA				

解：

①对于单次测量，则其标准不确定度等于1倍单次测量的标准偏差：

x＝46.3mA，

$u(x)=s(x)=0.074\text{mA}$。

② 对于n'＝3尺测量，测量结果为：

$$\bar{x}=\frac{45.4+45.3+45.5}{3}=45.4\text{mA}$$

$\bar{x}$ 的标准不确定度为：

$$u(\bar{x})=\frac{s(x)}{\sqrt{n'}}=\frac{0.074\text{mA}}{\sqrt{3}}=0.04\text{mA}$$

3、不确定度A类评定的独立性

在重复条件下所得的测量列的不确定度，通常比其他评定方法所得到的不确定度更为客观，并具有统计学的严格性，但要有充分的重复次数。此外，这一测量程序中的重复观测值，不是简单地重复读数，而是应当相互独立地观测。例如

(1) 被测量是一批材料的某一特性，所有重复观测值来自同一样品，而取样又是测量程序的一部分，则观测值不具有独立性。必须把不同样本间可能存在的随机差异导致的不确定度分量考虑进去。

(2) 测量仪器的调零是测量程序的一部分，重新调零应成为重复性的一部分。

不确定度A类评定的独立性（续）

(3) 测量器具与被测物品的连接是测量程序的一部分，重新连接应成为重复性的一部分。

(4) 通过直径的测量计算圆的面积，在进行直径的重复测量时，应随机地选取不同的方向观测。

(5) 当使用测量仪器的同一测量段进行重复测量时，测量结果均带有相同的这一测量段的误差，而降低了测量结果间的相互独立性。

(6) 在一个气压表上重复多次读取示值，把气压表扰动一下，然后让它恢复到平衡状态再读数。因为即使大气压力并无变化，还可能存在示值和读数的误差。等等。

4、其他几种常用的标准不确定度A类评定方法:

（1） 合并样本标准差

（2） 极差

（3） 最小二乘法

（4） 阿伦方差

4.1 规范测量中的合并样本标准差

对输入量*X*在重复性条件下或复现性条件下进行*n*次独立测量，得到x_1，x_2，…，x_n，其平均值为，实验标准偏差为*s*，自由度为*ν*。如果有*m*组这样的测量，则合并样本标准差s_p按下式计算

$$s_{\mathrm{p}}=\sqrt{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}s_j^2}=\sqrt{\frac{1}{m(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_{ji}-\overline{x}_j)^2}$$

合并样本标准差的自由度$\nu=m(n-1)$。

规范测量中的合并样本标准差(续)

如果m组这样的测量，每组的测量次数不同，例如测量次数各为n_j次，其自由度分别为$\nu_j = n_j - 1$ ，则由m个s_j和ν_j，则合并样本标准差s_p和自由度ν分别为：

$$s_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{m} \nu_j s_j^2}{\sum_{j=1}^{m} \nu_j}} \qquad 和 \qquad \nu = \sum_{j=1}^{m} \nu_j$$

4.2 极差法

在重复性条件下或复现性条件下，对X_i进行n次独立观测，计算结果中的最大值与最小值之差R(称为极差)，在X_i可以估计接近正态分布的前提下，单次测量结果x_i的实验标准差$s(x_i)$可按下式近似评定

$$s(x_i)=\frac{R}{C}=u(x_i)$$

上式中系数C及其自由度ν如表1.5所示。

4.2 极差系数C及其自由度ν

表1.5　极差系数C及其自由度ν

n	2	3	4	5	6	7	8	9
C	1.13	1.64	2.06	2.33	2.53	2.70	2.85	2.97
ν	0.9	1.8	2.7	3.6	4.5	5.3	6.0	6.8

通常在测量次数较小时采用，以4~9次为宜。

例：用金属洛氏硬度计测量混凝土回弹仪试验钢砧的硬度，测量5次硬度值分别为60.0，60.8，61.0，61.8HRC，5次测量的算术平均值为61.1HRC。

①贝塞尔方法计算得到算术平均值的标准不确定度为

$$u(\overline{H})=s(\overline{H})=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}(H_i-\overline{H})^2}{5\times(4-1)}}=0.36\text{HRC}$$

自由度为 $\nu=(n-1)=4$。

②采用极差法进行计算，则平均值的标准不确定度为

$$u(\overline{H})=s(\overline{H})=\frac{1}{\sqrt{n}}\times\frac{H_{\max}-H_{\min}}{C}=\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{62.0-60.0}{2.33}=0.38\text{HRC}$$

自由度为 $\nu=3.6$。

5、A类不确定度评定的自由度ν

自由度定义为“在方差计算中，和的项数减去对和的限制数”。

对于独立重复测量，自由度为

$$\nu = n - 1 \text{（}n\text{为测量次数）}$$

对于最小二乘法，自由度为

$$\nu = n - t \text{（}n\text{为数据个数，}t\text{为未知数个数）}$$

残差的和为零

A类评定开始

事先对X进行n次独立重复观测得到

$$x_1,\quad x_2,\quad \ldots,\quad x_i,\quad \ldots,\quad x_n$$

预先测量

求平均值 $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$

求实验标准差

$$s(x_i)=\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2/(n-1)}$$

在随后测量中按规范化常规测量对同类被测物的相同被测量X进行m次测量得

$$x_1,\quad x_2,\quad \ldots,\quad x_i,\quad \ldots,\quad x_m$$

实际测量

计算测量结果 $\bar{x}=\sum x_m/m$

计算A类评定标准不确定度 $u(\bar{x})=s(x_i)/\sqrt{m}$

当m=1时(只测1次)，A类标准不确定度为 $u(x)=s(x_i)$

自由度为 $\nu=n-1$

图1.10 A类评定流程

（五）标准不确定度的B类评定

B类标准不确定度：（由于系统效应导致的不确定度）不同于A类对观测列进行统计分析的方法来评定标准不确定度，称为不确定度B类的评定，有时也称B类不确定度评定。B类不确定度评定是根据经验和资料及假设的概率分布估计的标准（偏）差表征，也就是说其原始数据并非来自观测列的数据处理，而是基于实验或其他信息来估计，含有主观鉴别的成分。

B类不确定度的信息来源一般有：

1.以前的观测数据；

2.对有关技术资料的测量仪器特性的了解和经验；

3.生产企业提供的技术说明文件；

4.校准证书（检定证书）或其他文件提供的数据、准确度的等级或级别，包括目前仍在使用的极限误差、最大允许误差等；

5.手册或某些资料给出的参考数据及其不确定度；

6.规定试验方法的国家标准或类似技术文件中给出的重复性限 或复现性。

B类不确定度的评定方法

(1) 根据经验和有关信息或资料，先分析或判断被测量值落入区间 $[\bar{x}-a, \bar{x}+a]$ ，并估计区间内被测量值的概率分布，再按置信水准*p*来估计包含因子*k*，则B类标准不确定度*u*(*x*)为

$$u(x_i)=\frac{a}{k}$$

式中，*a*——置信区间半宽度。

k——对应于置信水准的包含因子。

B类标准不确定度方法

(2) 已知扩展不确定度*U*和包含因子*k*

如果估计值x_i来源于制造部门的说明书、校准证书、手册或其他资料，其中同时还明确给出了其扩展不确定度$U(x_i)$是标准不确定度$u(x_i)$的*k*倍，指明了包含因子*k*的大小，则标准不确定度$u(x_i)$可取

$$u(x_i)=\frac{U(x_i)}{k}$$

而估计值的方差 $u^2(x_i)$ 为其平方。

B类标准不确定度方法

例：校准证书上指出标称值为1kg的砝码的实际质量m＝1000.000 32g，并说明按包含因子k =3给出的扩展不确定度U=0.24mg。则该砝码的标准不确定度为$u(m)$=0.24mg/3=80μg，

估计方差为 $u^2(m) = (80\mu g)^2 = 6.4\times10^{-9} g^2$ 。

相应的相对标准不确定度$u_{rel}(m)$为

$$u(m) = \frac{u(m)}{m} = 80\times10^{-9}$$

B类标准不确定度方法

特别提示：

在这个例子中，砝码使用其实际值1000.000 32g，而不使用其标称值，即砝码是以“等”使用。评定的标准不确定度80μg是1000.000 32g标准不确定度。

B类标准不确定度方法

(3) 如x_i的扩展不确定度$U(x_i)$不是按标准偏差$s(x_i)$的k倍给出，而是给出了置信概率p和置信区间的半宽度 U_p，除非另有说明，一般按照正态分布考虑评定其标准不确定度$u(x_i)$。

$$u(x_i) = \frac{U(x_i)}{k_p}$$

正态分布的置信水准(置信概率p与包含因子k_p之间的关系示于表**1.6**。

B类标准不确定度方法

表1.6

正态分布情况下置信概率与包含因子之间的关系

$p(\%)$	50	68.27	90	95	95.45	99	99.73
k_p	0.67	1	1.645	1.960	2	2.576	3

这种情况在以“等”使用的仪器中出现最多。

B类标准不确定度方法

例：校准证书上给出标称值为10 Ω的标准电阻器的电阻R_s在23℃为

$$R_s(23℃)=(10.000\ 74\pm0.000\ 13)\ \Omega$$

同时说明置信水准p=99％。

由于U_{99}=0.13mΩ，查表6.1得k_p=2.58，其标准不确定度为$u(R_s)$=0.13mΩ3/2.58=50μΩ。估计方差为 $u^2(R_s)=(50\mu\Omega)^2=2.5\times10^{-9}\Omega^2$

相应的相对标准不确定度$u_{rel}(R_s)$为

$$u_{rel}(R_s)=u(R_s)/R_s=5\times10^{-6}$$

B类标准不确定度方法

例：机械师在测量零件尺寸时，估计其长度以50％的概率落在10.07mm至10.15mm之间，并给出了长度l=(10.11±0.04)mm，这说明0.04mm为p=50％的置信区间半宽度，在接近正态分布的条件下，查表6.1，k_{50}=0.67，则长度l的标准不确定度为

$u(l)$=0.04mm/0.67=0.06mm，

其估计方差为$u^2(l)=(0.04\text{mm}/0.67)^2=3.5\times10^{-3}\text{mm}^2$

B类不确定度的评定方法

(4) 已知扩展不确定度U_p以及置信水准p与有效自由度ν_{eff}的t分布

如x_i的扩展不确定度不仅给出了扩展不确定度Up和置信水准p，而且给出了有效自由度ν_{eff}或包含因子k_p，这时必须按t分布处理

$$u(x_i) = \frac{U_p}{t_p(\nu_{\text{eff}})}$$

这种情况提供的不确定度信息比较齐全，常出现在校准证书上。

B类标准不确定度方法

例：校准证书上给出标称值为5kg的砝码的实际质量为m=5000.000 78g，并给出了m的测量结果扩展不确定度U_{95}=48mg，有效自由度ν_{eff}=35。

查JJF 1059-1999第24页附录A的t分布表得到$t_{95}(35)$=2.02，故B类标准不确定度为

$$u(x_i)=\frac{U_{95}}{t_{95}(\nu_{rff})}=\frac{48\text{mg}}{2.02}=24\text{mg}$$

(5) 其他几种常见的分布

除了正态分布和*t*分布之外，其他常见的分布有均匀分布、反正弦分布、三角分布、梯形分布、及两点分布等，详见**JJF 1059-1999**的附录**B**。

如已知信息表明X_i估计值x_i分散区间半宽为a，且x_i落在$x_i - a_-$至$x_i + a_+$范围内的概率p为**100%**，即全部落在此范围内，通过对分布的估计，可以得出x_i的标准不确定度为 $u(x_i) = \frac{a}{k}$

表1.7　常用分布与包含因子k、$u(x_i)$的关系

分布类别	p(%)	k	$u(x_i)$
正　态	99.73	3	$a/3$
三　角	100	$\sqrt{6}$	$a/\sqrt{6}$
梯　形 β=0.71	100	2	$a/2$
矩　形	100	$\sqrt{3}$	$a/\sqrt{3}$
反正弦	100	$\sqrt{2}$	$a/\sqrt{2}$
两　点	100	1	a

a为测量值概率分布区间半宽度

例： 手册中给出纯铜在20℃时的线膨胀系数 α_{20}(Cu)为16.52×10^{-6}℃$^{-1}$，并说明此值变化的半范围为 a=0.40×10^{-6}℃$^{-1}$。按 α_{20}(Cu)在[(16.52–0.40)× 10^{-6}℃$^{-1}$， (16.52 +0.40)× 10^{-6}℃$^{-1}$]区间内为均匀分布，于是有

$$u(\alpha)=\frac{a}{k}=\frac{0.40\times 10^{-6}}{\sqrt{3}}=0.23\times 10^{-6}\,{}^{\circ}\mathrm{C}^{-1}$$

矩形分布(均匀分布)

- 标准不确定度：$u(x)=a/\sqrt{3}$
- 特征：

估计值以p＝100％的概率均匀散布在±a区间内，落在该区间外的概率为零；且没有说明概率分布。

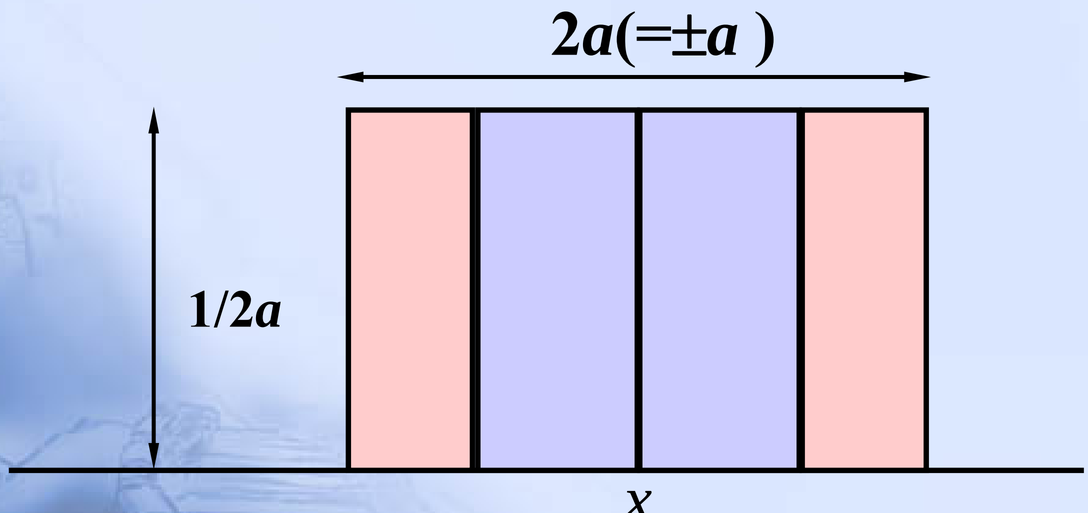


图1.11 矩形（均匀）分布

矩形分布是有界的，符合下列条件之一者，一般可以近似地估计为矩形分布：

(1) 数据修约导致的不确定度；

(2) 数字式测量仪器对示值量化(分辩力)导致的不确定度；

(3) 测量仪器由于滞后、摩擦效应导致的不确定度；

(4) 按级使用的数字仪表、测量仪器最大允许误差导致的不确定度；

(5) 用上、下界给出的线膨胀系数；

(6) 测量仪器度盘或齿轮回差引起的不确定度；

(7) 平衡指示器调零不准导致的不确定度。

三角分布

- 标准不确定度：$u(x)=a/\sqrt{6}$
- 特征：

估计值以*p*＝100％的概率落在±**a**区间内，靠近***x***的数值比接近边界的值多，落在该区间外的概率为零；且没有说明概率分布。

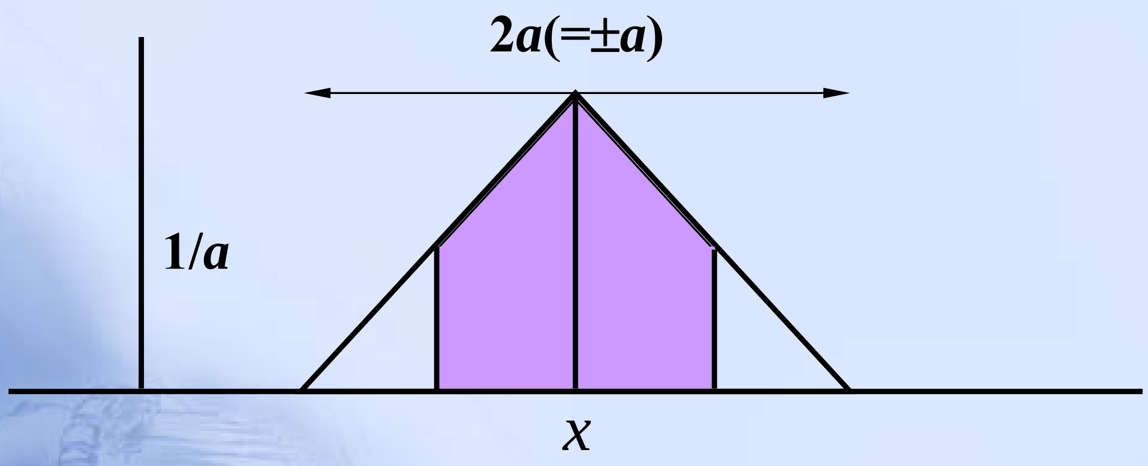


图1.12 三角分布

三角分布是有界的，符合下列条件之一者，一般可以近似地估计为三角分布：

(1) 相同修约间隔给出的两独立量之和或差，由修约导致的不确定度；

(2) 因分辩力引起的两次测量结果之和或差引起的不确定度；

(3) 用替代法检定标准电子元件或测量衰减时，调零不准导致的不确定度；

(4) 两相同均匀分布的合成。

(5) 常用玻璃量器的示值误差导致的不确定度。

例：数字电压表制造厂说明书说明：仪器校准后1~2年内，在1V内示值最大允许误差的模为：

$$0.40\times10^{-6}\times(\text{读数})+2\times10^{-6}\times(\text{范围})$$

设校准后20个月在1V内测量电压，在重复性条件下独立测得电压*U*，其平均值为

$$\overline{U}=0.928671\text{V}$$

平均值的实验标准差为 $s(\overline{U})=12\mu\text{V}$

电压表最大允许误差的模(即区间半宽度)为

$$a=14\times10^{-6}\times0.928\,571\text{V}+2\times10^{-6}\times1\text{V}=15\mu\text{V}$$

查表得 $k=\sqrt{3}$，则示值误差的标准不确定度为

$$U(U)=\frac{a}{k}=\frac{15\mu\text{V}}{\sqrt{3}}=8.7\mu\text{V}$$

特别提示

在缺乏任何其他信息的情况下，一般估计为均匀分布(矩形分布)是比较合理的。如果已知被测量X_i的可能值出现在a_-至$+a_+$范围中心附近的概率，大于接近区间的边界时，则最好估计为三角分布。

如果x_i本身就是重复性条件下的几个观测值的算术平均值，则可估计为正态分布。

在有些情况下，可采用同行共识，如化学检测实验室的定容误差，欧洲分析化学中心(EURACHEM)认为其服从三角分布。

例：制造商给出A级100mL单标线容量瓶的允差为±0.1mL。

欧洲分析化学中心(EURACHEM)认为其服从三角分布，则区间半宽度为*a*=0.1 mL，包含因子 $k=\sqrt{6}$ 。由此引起的引起的标准不确定度为：

$$u=\frac{a}{k}=\frac{0.1}{\sqrt{6}}=0.0408\text{mL}$$

参见CNAS-GL06:2006《化学分析中不确定度的评估指南》。

(6) 界限不对称的考虑

在输入量X_i的可能值的下界$a_$和上界a_+相对于其最佳估计值x_i不对称的情况下，其下界$a_=x_i-b_$，上界$a_+=x_i+b_+$，其中$b_\neq b_+$。这时由于x不处于区间$[a_, a_+]$的中心，输入量X_i的概率分布在此区间内不会是对称的，在缺乏用于准确判断其分布状态的信息时，可以按均匀分布处理，区间半宽度为$a=(a_+-a_)/2$，由此引起的引起的标准不确定度为：

$$u(x)=\frac{a}{k}=\frac{(a_+-a_-)/2}{\sqrt{3}}=\frac{a_+-a_-}{\sqrt{12}}=\frac{b_++b_-}{\sqrt{12}}$$

其方差为 $$u^2(x)=\frac{(a_+-a_-)^2}{12}=\frac{(b_++b_-)^2}{12}$$

例: 查物理手册得到黄铜在20℃时的线膨胀系数 $\alpha_{20}(Cu)=16.52\times10^{-6}℃^{-1}$，但指明最小可能值为 $16.40\times10^{-6}℃^{-1}$，最大可能值为 $16.92\times10^{-6}℃^{-1}$。

由给出的信息知道是不对称分布，这时有：

$a_-=(16.40-16.52)\times10^{-6}℃^{-1}=-0.12\times10^{-6}℃^{-1}$,

$a_+=(16.92-16.52)\times10^{-6}℃^{-1}=0.40\times10^{-6}℃^{-1}$。

因此，区间半宽度 $a=(a_+-a_-)/2=(0.40-0.12)/2\times10^{-6}℃^{-1}=0.26\times10^{-6}℃^{-1}$，假设为均匀分布，包含因子 $k=\sqrt{3}$。其标准不确定度为：

$$u(\alpha_{20})=\frac{a}{k}=\frac{0.26}{\sqrt{3}}=0.15\times10^{-6}{}^{\circ}C^{-1}$$

有时对于不对称的界限，可以对估计值x_i加以修正，修正值的大小为$(b_+-b_-)/2$，则修正后X_i就在界限的中心位置$x_i= (a_-+a_+)/2$，而其半宽度为$a= (a_+-a_-)/2$，从而可以按上述各节处理。

注意JJF 1059-1999是建立在对称分布基础上的。

例:数字显示测量仪器，如其分辨为δ*x*，量化误差是一个宽度为δ*x*的矩形分布，区间半宽度为δ*x*/2。则有

$$u(x)=\frac{\delta x/2}{k}=\frac{\delta x}{2\sqrt{3}}=0.29\delta x$$

虽量化误差不一定是对称分布，但一般取对称分布。

例：　　对于量值(数据)修约，如修约间隔为δx，修约误差是一个宽度为δx的矩形分布，区间半宽度为$\delta x/2$。则有

$$u(x)=\frac{\delta x/2}{k}=\frac{\delta x}{2\sqrt{3}}=0.29\delta x$$

如果量值(数据)修约根据GB 3101-1993的规定进行，那么修约引起的误差分布是完全对称的均匀分布(矩形分布)。

(7) 由重复性限或复现性限求不确定度

在规定实验方法的的国家标准或类似技术文件中，按规定的测量条件，当明确指出两次测量结果之差的重复性限*r*或复现性限*R*时，如无特殊说明，则测量结果的不确定度为

$$u(x_i) = r/2.83 \qquad \text{或} \qquad u(x_i) = R/2.83$$

式中，重复性限*r*或复现性限*R*的置信水准为95%，并作正态分布处理。

(7) 由重复性限或复现性限求不确定度

由于有 $Y=X_1-X_2$

式中，X_1和X_2为服从同一正态分布的随机变量，由不确定度传播率得

$$u^2(Y)=u^2(X_1)+u^2(X_2)=2u^2(X)$$

故

$$u(y)=\sqrt{2}u(x_i)$$

由置信水准为95％得

$$U(y)=2\sqrt{2}u(x_i)$$

故

$$u(x_i)=\frac{U(y)}{2\sqrt{2}}=\frac{r}{2\sqrt{2}}=\frac{r}{2.83}$$

(8) 以“等”使用的仪器的不确定度计算

当测量仪器检定证书上给出准确度等别时，可根据“计量器具检定系统”或检定规程所规定的该等别的测量不确定度大小，按本节(2)或(3)中所述的方法计算标准不确定度分量。当检定证书既给出扩展不确定度，又给出有效自由度时，可按本节(4)中所述的方法评定标准不确定度分量。

对于以“等”使用的仪器的标准不确定度评定，应注意以下问题：

(1) 以“等”使用的仪器的标准不确定度评定，一般采用正态分布或*t*分布。

(8) 以“等”使用的仪器的不确定度计算

(2) 以“等”使用的指示类仪器，使用时应对其示值进行修正或使用校准曲线；以“等”使用的量具，应使用其实际值(标称值)。同时还应当考虑其长期稳定性的影响，通常把两次检定周期或校准周期之间的差值，作为不确定度的一个分量，该分量按均匀分布处理。

(3) 以“等”使用的仪器，使用时的环境条件偏离参考条件时，要考虑环境条件引起的不确定度分量。

(4) 以“等”使用的仪器，上面计算所得到的标准不确定度分量已包含了其上一等别仪器对所使用等别的仪器进行检定或校准带来的不确定度。因此，不需要考虑上一等别检定或校准的不确定度。

例：《二等标准铂铑10-铂热电偶检定证书》给出热点偶在300℃～1100℃范围内检定合格。

由《JJG 2003-1987铂铑10-铂热电偶计量器具检定系统框图》可知，二等标准铂铑10-铂热电偶总不确定度为δ=1.0℃，(k=3)。

所以，由二等标准铂铑10-铂热电偶引入的标准不确定度分量为：

$$u(x_i)=\frac{\delta}{k}=\frac{1.0^\circ\mathrm{C}}{3}=0.333^\circ\mathrm{C}$$

例： 《1000g F_1等砝码检定证书》给出检定合格。

由《JJG 2053-1990质量计量器具检定系统框图》可知，1000g F_1等砝码的质量总不确定度（置信概率99.73%）Δ_z＝20mg。因此，包含因子k＝3。

所以，由1000g F_1等砝码引入的标准不确定度分量为：

$$u = \frac{\Delta_z}{k} = \frac{20}{3}\text{mg} = 6.67\text{mg}$$

(9)以“级”使用的仪器的不确定度计算

当测量仪器检定证书上给出准确度级别时，可根据“计量器具检定系统”或检定规程所规定的该级别的最大允许误差进行评定。假设最大允许误差为±*A*，一般采用均匀分布，得到示值允差引起的标准不确定度分量为

$$u(x)=\frac{A}{\sqrt{3}}$$

对于以“级”使用的仪器的标准不确定度评定，应注意：

(1) 以“级”使用的仪器，上面所得的标准不确定度分量并没有包含上一个级别仪器对所使用级别仪器进行检定带来的不确定度。因此，当上一级别检定的不确定度不可忽略时，还要考虑这一项不确定度分量

(2) 以“级”使用的指示类仪器，使用时直接使用其示值而不需要进行修正；量具使用其实际值(标称值)。所以可以认为仪器的示值允差已包含了仪器长期稳定性的影响不需要再考虑仪器长期稳定性引起的不确定度。

(3) 以“级”使用的仪器，使用时的环境条件只要不超过允许使用的范围，仪器的示值误差就始终不会超出示值的允差。因此，在这种情况下，不必考虑环境条件引起的不确定度

例：《0.2级三相标准电能表检定证书》给出检定合格，符合A型技术指标要求的结论。

查《JJG596-1999 电子式电能表》检定规程，0.2级A型三相（平衡负载）标准电能表，负载电流为0.1 I_b～I_{max}，功率因数$\cos\phi$=1时，基本误差限为±0.2％。$k=\sqrt{3}$ 则区间半宽度为a=0.2％，服从矩形分布，包含因子。由此引起的标准不确定度为：

$$u=\frac{a}{k}=\frac{0.2\%}{\sqrt{3}}=0.116\%$$

例：仪器制造厂的说明书给出仪器的准确度(或误差)为±1%。

我们可以假定这是对仪器最大误差限值的说明，而且所有测量值的误差值是等概率地（矩形分布）处于该限值范围[–0.01，+0.01]内。（因为大于±1%误差限的仪器，属于不合格品，制造厂不准出厂；或者检定不合格，不准投入使用。）

矩形分布的包含因子 $k=\sqrt{3}$ ，仪器误差的区间半宽度*a*=0.01(1%)。因此，标准不确定度为：

$$u(x_i)=\frac{a}{k}=\frac{1.0\%}{\sqrt{3}}=0.58\%$$

例： 制造商给出A级100mL单标线容量瓶的允差为±0.1mL。

欧洲分析化学中心(EURACHEM)认为其服从三角分布，则区间半宽度为a=0.1 mL，包含因子$k=\sqrt{6}$ 。由此引起的引起的标准不确定度为：

$$u=\frac{a}{k}=\frac{0.1}{\sqrt{6}}=0.0408\text{mL}$$

附：如何正确使用校准证书

1. 校准证书格式

表1.8所示是某数字电压表10V和5V示值的校准结果。校准数据除了给出了10V和5V示值误差外，还给出了数字电压表10V示值的最大允许误差(技术说明书规定的技术指标)为Δ=±42.5μV，γ_{max}=27(+15)μV <|Δ|=42.5μV(括号内15μV是扩展不确定度)，5V示值的最大允许误差为Δ= ±22.5μV，γ=24μV >|Δ|=22.5μV，所以校准结果判断10V符合技术规范要求(即技术说明书规定的技术指标)，5V不符合技术规范要求

表1.8 校准证书数据格式示例

序号	标称值(示值) V_x	校准值(实际值) V_S	示值误差 γ	允许误差 Δ	符合性判别
1	10.000000 V	9.999973 V	27 μV	±42.5 μV	符合
2	5.000000 V	4.999976 V	24 μV	±22.5 μV	不符合

- 校准值9.999972 V的示值误差为27 μV，测量不确定度U_{95}=15μV，ν_{eff}=36，包含因子$k_p(\gamma)=t_{95}(36)=2.03$。
- 校准值4.999971 V的示值误差为24 μV，测量不确定度 U_{95}=12μV，ν_{eff}=36，包含因子$k_p(\gamma)=t_{95}(36)=2.03$。

2．校准证书数据的正确使用方法

计量器具的校准证书应给出校准值、其测量不确定度以及它的置信概率或所采用的包含因子。对于某些宽量程的仪器，需要对不同的读数或不同的量程范围计算不同的不确定度。

对于校准证书给出的数据，除非另有说明，一般就假定其不确定度服从正态分布或*t*分布，如果引用95％的置信概率，则对应的包含因子$k=2$；如果引用99％的置信概率，则对应的包含因子$k=3$。如果没有说明包含因子，则只能假定所用的包含因子$k=2$。当校准证书既给出扩展不确定度，又给出有效自由度时，可按*t*分布评定标准不确定度分量。

由这些不确定度来源所引起的标准不确定度，可直接用给出的或算得的不确定度除以包含因子得到。

但是应当注意，这时不能使用计量器具的示值或标称值，而必须使用其校准值(实际值)或校准曲线。

其次，使用时的环境条件偏离参考条件时，要考虑环境条件引起的不确定度分量。同时还应当考虑其长期稳定性的影响，通常把历次校准周期之间差值的最大值，作为不确定度的一个分量，该分量按均匀分布处理。

2.1 10V示值校准数据的使用

2.1.1 使用校准值(实际值)

由表1.8校准数据可知，数字电压表校准值9.999973 V的扩展不确定度U_{95}=15μV，ν_{eff}=36包含因子$k_p(\gamma)=t_{95}(36)$=2.03，相应的标准不确定度为

$$u=\frac{U_{95}}{t_{95}(95)}=\frac{15\mu\text{V}}{2.03}=7.5\mu\text{V}$$

2.1.2 使用标称值(数字电压表额定示值)

因为数字电压表10V示值满足其技术指标要求，故可以直接使用其额定示值。使用其额定示值的最大允许误差为±42.5 μV，服从均匀分布，区间半宽度a=42.5 μV，包含因子 $k=\sqrt{3}$ ，相应的标准不确定度为

$$u=\frac{a}{k}=\frac{42.5\mu\text{V}}{\sqrt{3}}=24.54\mu\text{V}$$

2.2 5V示值校准数据的使用

2.2.1 使用校准值(实际值)

由校准数据可知，数字电压表校准值4.999976 V 的扩展不确定度U_{95}=12μV，ν_{eff}=36包含因子$k_p(\gamma)=t_{95}(36)=2.03$，相应的标准不确定度为

$$u=\frac{U_{95}}{t_{95}(95)}=\frac{12\mu\mathrm{V}}{2.03}=6.0\mu\mathrm{V}$$

需要指出，使用校准值只能在标称值10V和5V点，因为其他标称值没有校准数据，例如9V，8V，7V，6V，4V，3V，2V等示值。

2.2.2 使用标称值(数字电压表额定示值)

因为数字电压表5V示值不满足其技术指标要求，故不可以直接使用其示值，只能使用校准值。如果要使用其示值，必须对数字电压表进行调整，然后重新进行校准，使示值误差完全符合数字电压表的技术指标。

如何使用检定证书

1． 以“等”使用的仪器的检定证书

当测量仪器检定证书上给出准确度等别时，按照本章以“等”使用的仪器的标准不确定度评定”方法使用。

2． 以“级”使用的仪器的检定证书

当测量仪器检定证书上给出准确度等别时，按照本章以“级”使用的仪器的标准不确定度评定”方法使用。

3． 检定合格证和检定合格印

参看表**1.8**，对于简单型符合规程要求的强检计量器具，如压力表、电流表、衡器、电能表、水表、煤气表、出租车计价器等，通常出具检定合格证或检定合格印，这种印证没有给出检定数据。

这时需要根据“计量器具检定系统”或检定规程或该计量器具的技术说明书所规定的该等别的测量不确定度大小或级别的最大允许误差来计算标准不确定度。例如**1**级电能表，其最大允许误差为±**1**％，服从均匀分布。

B类评定标准不确定度的自由度ν

自由度所反映的是信息量，故可用来衡量不确定度的可靠程度。

B类评定标准不确定度的自由度ν_i与所得到的标准不确定度$u(x_i)$的相对标准不确定度

有关，其关系为： $\sigma[u(x_i)]/u(x_i)$

$$\nu_i \approx \frac{1}{2}\frac{u^2(x_i)}{\sigma^2[u(x_i)]} \approx \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)}\right]^{-2}$$

式中$\sigma[u(x_i)]$是标准不确定度的标准差，即$\sigma[u(x_i)]$是标准差的标准差，不确定度的不确定度。

表1.9 $\sigma[u(x_i)]/u(x_i)$ 与自由度 ν_i的关系			
$\sigma[u(x_i)]/u(x_i)$	自由度 ν_i	$\sigma[u(x_i)]/u(x_i)$	自由度 ν_i
0	∞	0.30	6
0.10	50	0.40	3
0.20	12	0.50	2
0.25	8		
对于检测实验室，通常可以选择B类评定的自由度∞。			

如何选择B类不确定度的自由度ν

由上述分析可知，无论B类评定还是A类评定，自由度越大，不确定度的可靠程度越高。不确定度用来衡量测量结果的可靠程度，而自由度则是用来衡量不确定度可靠程度的。所以可以说自由度是一种二次或二阶不确定度。

应该说明的是，自由度表达式不仅适用于正态分布，也适用于其他任何分布的情况。所以，不确定度B类评定不仅要判断其概率分布，还要判断其可靠程度。这要求评定人员具有相关的经验，以及其对有关知识深刻的了解。

如何选择B类不确定度的自由度ν

（1）当不确定度的评定有严格的数字关系，如数显仪器量化误差和数据修约引起的不确定度，可估计其自由度$\nu\to\infty$。

（2）当计算不确定度的数据来源于校准证书、检定证书、标准物质赋值证书或手册等比较可靠资料时，可以取比较高的自由度。

（3）当不确定度的计算带有一定的主观判断因素，如指示类仪器的读数误差引起的不确定度，可能要取比较低的自由度

如何选择B类不确定度的自由度ν

（4）当不确定度的信息来源难以用有效的实验方法验证时，或实验验证误差较大时，自由度可能非常低。

（5）在实际工作中用一种保证避免低估自由度的方法进行评估。例如当下界和上界分别为a_-和a_+时，如均匀分布或三角分布，或有上下界的分布，通常选择被测量的估计值x落在上下界之外的概率极小。

在这种假设情况下可以认为$u(x)$的自由度$\nu\to\infty$。如果没有理由作上述假设时，则需采用其他方法。

求各个输入分量标准不确定度对输出量y的标准不确定度的贡献

在求出各个输入量的不确定度分量$u_i(x)$之后，还需要计算传播系数（灵敏系数）c_i，最后计算由此引起的被测输出量y的标准不确定度分量：

$$u_i(y)=|c_i|u(x_i)=\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|u(x_i)$$

式中传播系数或灵敏系数$c_i=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$的含义是，输入量的估计值$x_i$的单位变化引起的输出量的估计值$y$的变化量，即起到了不确定度的传播作用。

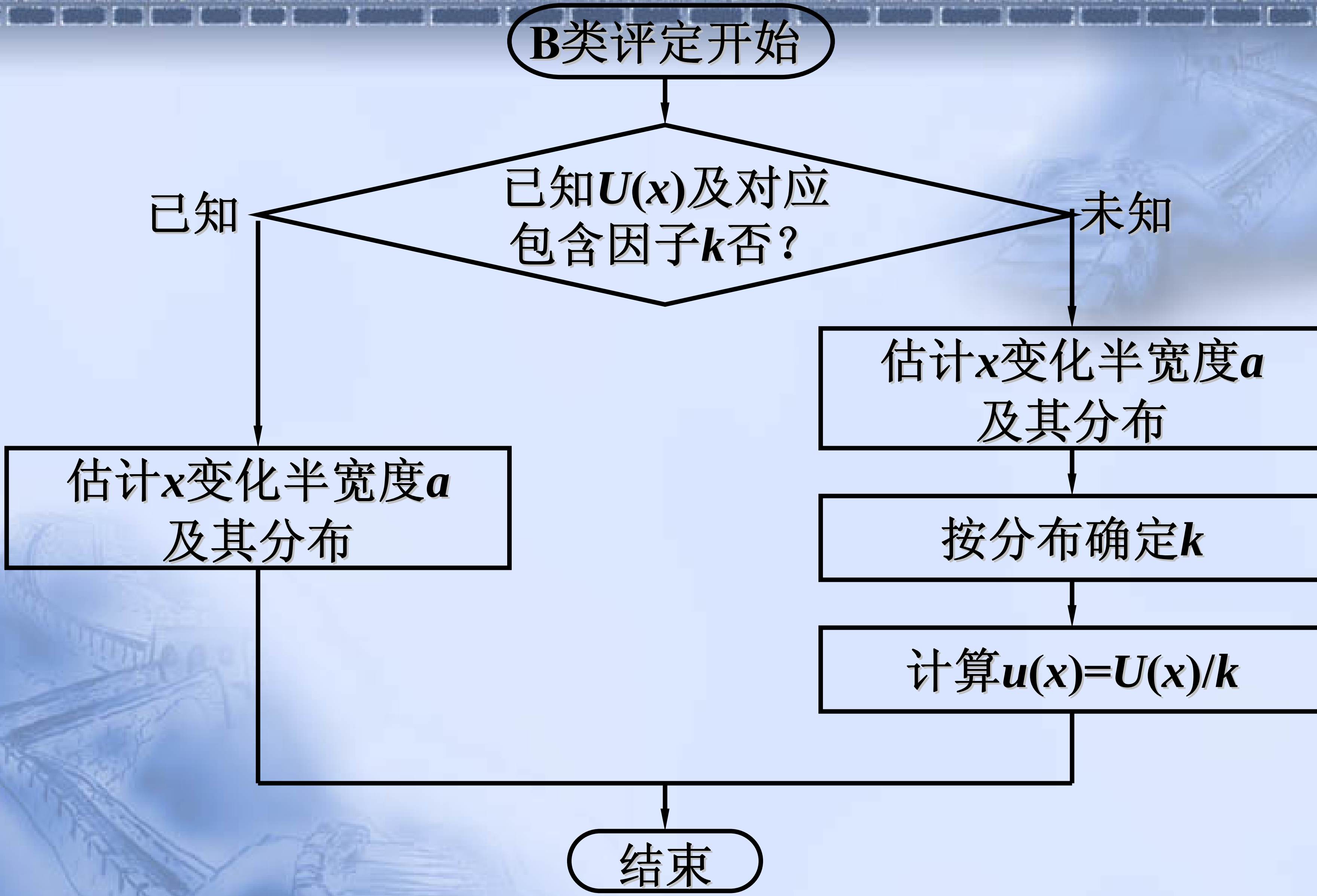


图1.13 标准不确定度B类评定流程图

（六）合成标准不确定度的评定

被测量Y的估计值$y=f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$的标准不确定度是由相应输入量$x_1$，$x_2$，…，$x_N$的标准不确定度合理合成求得的，其表示式的符号为$u_c(y)$，下脚标“c”系“合成”之义，取自英文**combined**的第一个字母。

合成标准不确定度$u_c(y)$表征合理赋予被测量之值Y的分散性，是一个估计标准偏差。

不相关输入量的合成

当全部输入量X_i是彼此独立或不相关时，输出量Y的估计值y的合成标准不确定度$u_c(y)$由下式得出

$$u_c^2(y)=\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]^2 u^2(x_i)$$

式中：f —— 被测量估计值y与各直接测得量x_i的函数关系式；

$u(x_i)$——各直接测得量x_i的标准不确定度，

可以是A或B类评定方法给出的。

灵敏系数和测量结果不确定度分量$u_i(y)$

式中的偏导数$\partial f/\partial x_i$是在$X_i=x_i$时导出的，这些偏导数称为灵敏系数(或传播系数)，用符号c_i表示，即$c_i=\partial f/\partial x_i$。它描述输出估计值$y$如何随输入估计值$x_1$，$x_2$，…，$x_N$的变化而变化。尤其是，当输入估计值$x_i$产生微小变化时，将引起输出估计值$y$变化，可用$(\Delta y)_i=(\partial f/\partial x_i)\Delta x_i=c_i\Delta x_i$表示。如果$(\Delta y)_i$是来自输入估计值$x_i$的标准不确定度$u(x_i)$的变化所引起，那么输出估计值$y$的相应变化就是$(\partial f/\partial x_i)u(x_i)=|c_i|u(x_i)$。因此在各输入量$X_i$互不相关时，上式可表示为

灵敏系数和测量结果不确定度分量$u_i(y)$

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left[c_i u(x_i) \right]^2 \equiv \sum_{i=1}^{N} u_i^2(y)$$

式中，$c_i \equiv \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ ， $u_i(y) \equiv \left| c_i \right| u(x_i)$

例：一个随温度t变化的电阻器两端的电压为U，在温度t_0时的电阻为R_0，电阻器的温度系数为α，则电阻器损耗的功率与输入量U，R_0，α和t有关，被测量与输入量的函数关系为

$$P = f(U, R_0, \alpha, t) = \frac{U^2}{R_0\left[1+\alpha(t-t_0)\right]}$$

已知t_0=19.5℃，输入量U，R_0，α和t的估计值分

别为U=10.00V，R_0=1000.0Ω，$\alpha=2\times10^{-5}$/℃和t=21.5℃，试求测量结果P的合成标准不确定度。

解：根据上式可列出测量结果P的合成方差表示式

$$u_{\mathrm{c}}^2(P)=\left(\frac{\partial P}{\partial U}\right)^2 u^2(U)+\left(\frac{\partial P}{\partial R_0}\right)^2 u^2(R_0)$$

$$+\left(\frac{\partial P}{\partial \alpha}\right)^2 u^2(\alpha)+\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2 u^2(t)$$

$$=\left[c_1 u(U)\right]^2+\left[c_2 u(R_0)\right]^2+\left[c_3 u(\alpha)\right]^2+\left[c_4 u(t)\right]^2$$

$$=u_1^2(P)+u_2^2(P)+u_3^2(P)+u_4^2(P)$$

式中，

$$c_1 = 2U/\{R_0[1+\alpha(t-t_0)]\} = 2P/U$$

$$c_2 = -U^2/\{R_0^2[1+\alpha(t-t_0)]\} = -P/R_0$$

$$c_3 = -U^2(t-t_0)/\{R_0[1+\alpha(t-t_0)]^2\}$$

$$= -P(t-t_0)/[1+\alpha(t-t_0)]$$

$$c_4 = -U^2\alpha/\{R[1+\alpha(t-t_0)]^2\} = -P\alpha/[1+\alpha(t-t_0)]$$

由各输入量的估计值可计算得到测量结果 P=0.099 992W=99.992mW。将输入量的估计值和 P 带入各 c_i 得到

$$c_1 = 2\times 99.996\mathrm{mW}/10.00\mathrm{V} = 19.9992\mathrm{mA} = 20\mathrm{mA}$$

$$c_2 = -99.996\mathrm{mW}/1000\Omega = -0.099996\mathrm{mW}/\Omega \approx -0.1\mathrm{mW}/\Omega$$

$$c_3 = -99.996\mathrm{mW}(21.5^\circ\mathrm{C}-19.5^\circ\mathrm{C})/\left[1+2\times 10^{-5\circ}\mathrm{C}(21.5^\circ\mathrm{C}-19.5^\circ\mathrm{C})\right]$$

$$= -99.996\mathrm{W}^\circ\mathrm{C} \approx -100\mathrm{W}^\circ\mathrm{C}$$

$$c_1 = -99.996\mathrm{mW}\times 2\times 10^{-5^\circ}\mathrm{C}/\left[1+2\times 10^{-5\circ}C(21.5^\circ C-19.5^\circ C)\right]$$

$$= -0.00199998\,\mathrm{mW}/^\circ\mathrm{C} \approx -0.002\,\mathrm{mW}/^\circ\mathrm{C}$$

将各输入估计值x_i的标准不确定度$u(x_i)$的灵敏系数代入式(7.2b)，得到与各输入量估计值x_i的标准不确定度$u(x_i)$对应的测量结果P的标准不确定度分量$u_i(P)$为

$$u_1(P) = |c_1| u(U) = 20\mathrm{mA} \times u(U)$$

$$u_2(P) = |c_2| u(R_0) = (0.1\mathrm{mW}/\Omega) u(R_0)$$

$$u_3(P) = |c_3| u(\alpha) = \left(100\mathrm{mW}^\circ\mathrm{C}^{-1}\right) \times u(\alpha)$$

$$u_4(P) = |c_4| u(t) = 0.002\mathrm{mW}^\circ\mathrm{C}^{-1} \times u(t)$$

由于各分量互不相关，因而测量结果*P*的合成方差为

$$u_c^2(P)=[0.2\text{mA}\cdot u(U)]^2+[(-0.1\text{W}/\Omega)\cdot u(R_0)]^2+$$
$$=[-0.002\text{mW}\cdot{}^\circ\text{C}\cdot u(\alpha)]^2+[(-0.002\text{mW}/{}^\circ\text{C})u(t)]^2$$

测量结果*P*的合成标准不确定度$u_c(P)$为合成方差的正平方根 。

【注】当灵敏系数没有可靠的数学表达式存在时，灵敏系数c_i也可以通过实验直接评定给出。

合成不确定度表达的简化形式1

有时，在输入量彼此独立的线性模型的情况下，合成不确定度的表达可以采用更为简单的形式。合成标准不确定度的两个简单规则如下：

【规则 1】只涉及量的和或差的线性模型，例如：

$y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$ 。则合成标准不确定度如下：

$$u_c(y) = \sqrt{c_1^2 u^2(x_1) + c_2^2 u^2(x_2) + \cdots + c_n^2 u^2(x_n)}$$

此时，有 $c_i u(x_i) = u_i(y)$，所以可以将上式写作：

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2(y)}$$

合成不确定度表达的简化形式1

【例】 $y=x_1+x_2$，且x_1与x_2不相关，

$u(x_1)=1.73\text{mm}$，$u(x_1)=1.15\text{mm}$。

则

$$u_c^2(y)=u^2(x_1)+u^2(x_2)$$

$$u_c(y)=\sqrt{u^2(x_1)+u^2(x_2)}$$

$$=\sqrt{1.73^2+1.15^2}\text{mm}=2.08\text{mm}\approx 2.1\text{mm}$$

合成不确定度表达的简化形式2

【规则2】只涉及积或商的模型，如果函数*f*的表现形式为：$y = mx_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n}$,合成标准不确定度有：

$$u_{\mathrm{rel}}(y) = \frac{u_c(y)}{y} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[p_i \frac{u(x_i)}{x_i}\right]^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}[p_i u_{\mathrm{rel}}(x_i)]^2} \quad (2.26)$$

式中，式中，*m*是常数，指数p_i可以是正数、负数或分数(p_i的不确定度可以忽略不计)，$u_{rel}(x_i)=u(x_i)/x_i$ 是相对标准不确定度。其灵敏系数$|c_i|=|p_i|$。

上式给出的是相对合成标准不确定度，对于线函数的形式，采用相对标准不确定度进行评定比较方便。

$$y = mx_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n}$$

【例】 $y=x_1x_2$， x_1和x_2不相关

①应用规则2，采用相对标准不确定度，用方和根方法合成，输出量y的相对合成标准不确定度为：

$$u_{\mathrm{c\,rel}}(y)=\sqrt{u_{\mathrm{rel}}^2(x_1)+u_{\mathrm{rel}}^2(x_2)}$$

②直接应用不确定度传播率

$$\partial y/\partial x_1=x_2 \qquad \partial y/\partial x_2=x_1$$

$$u_{\mathrm{c\,rel}}(y)=\frac{u_{\mathrm{c}}(y)}{y}=\frac{\sqrt{x_2^2u^2(x_1)+x_1^2u^2(x_2)}}{x_1x_2}$$

$$=\sqrt{\frac{u^2(x_1)}{x_1^2}+\frac{u^2(x_2)}{x_2^2}}=\sqrt{u_{\mathrm{rel}}^2(x_1)+u_{\mathrm{rel}}^2(x_2)}$$

【例】 $y=x_1/x_2$ ， x_1和x_2不相关。

应用规则2，采用相对标准不确定度，用方和根方法合成，输出量y的相对合成标准不确定度为：

$$u_{\mathrm{c\,rel}}(y)=\sqrt{u_{\mathrm{rel}}^2(x_1)+u_{\mathrm{rel}}^2(x_2)}$$

【例】 $y=\dfrac{x_1x_2}{x_3}$ ，且各输入量相互独立无关。

已知：x_1= 80，x_2= 20，x_3= 40；$u(x_1)$= 2，$u(x_2)$= 1，$u(x_3)$= 1。求合成标准不确定度$u_c(y)$ 。

【解】

$$u_{crel}(y)=\frac{u_c(y)}{y}=\sqrt{[\frac{u(x_1)}{x_1}]^2+[\frac{u(x_2)}{x}]^2+[\frac{u(x_3)}{x_3}]^2}$$

$$=\sqrt{(\frac{2}{80})^2+(\frac{1}{20})^2+(\frac{1}{40})^2}=0.061$$

$$y=\frac{x_1x_2}{x_3}=\frac{80\times 20}{40}=40$$

$$u_c(y)=y\times u_{crel}(y)=40\times 0.061=2.44$$

【例】圆柱体体积*V*的测量通过测量半径*r*与高*h*计算得到，其函数关系为

$$V = \pi r^2 h$$

式中，*u*(π)可以通过取适当有效位数而忽略不计，则按式(7.3)可得

$$u_{\mathrm{crel}}^2(V) = [2u_{\mathrm{rel}}(r)]^2 + u_{\mathrm{rel}}^2(h)$$

相关系数估计值的范围为

$$-1 \le \gamma(x_i, x_j) \le +1$$

相关输入量的合成

由不确定度传播率可知，对于输入量相关的情况，这时有协方差函数项$u(x_i,x_j)= u(x_j,x_i)$：

$$2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i, x_j)$$

$$=2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i+1}^{N-1}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\gamma(x_i, x_j)u(x_i)u(x_j)$$

下列几种情况可认为量输入X_i完全正相关，即相关系数$r(x_i, x_j)=+1$：①输入量X_i呈线形或近似线形关系；②输入量X_i属于同一体系的分量，如用同一米基线尺测量两个**1m**的长度，则各米分量之间完全相关；③若一个分量增大或减小，引起其他分量增大或减小；④如果知道量输入X_i相关，可近似取相关系数$r(x_i, x_j)=+1$。

相关系数 $\gamma(x_i, x_j) = \gamma(x_j, x_i)$ =＋1

即输入量的估计值x_i和x_j正相关时，输出量的合成标准不确定度用下式表示：

$$u_c^2(y) = [\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| u(x_i)]^2$$

(1) 当 $c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ ＝1时，合成标准不确定度为：

$$u_c(y) = \sum_{i=1}^{N} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| u(x_i) = \sum_{i=1}^{N} u_i(y)$$

这种情况属于强相关。

(2) 对于$Y=X_1-X_2$的情况，如果相关系数$r(x_1，x_2)=r(x_2，x_1)=+1$，且当 $c_1=\partial f/\partial x_1=-c_2=-\partial f/\partial x_2$ 时，则合成标准不确定度可用方和根（**RSS**）方法合成。

【例】采用配恒体称量法，第一次称得m_1，加入被测物品$m(<<m_1)$后，用同一台天平第二次称得m_2，则被测物品质量为：$m=m_2-m_1$。相关系数$r(m_1，m_2)=-1$，$c_1=\partial f/\partial m_1=-c_2=-\partial f/\partial m_2$。可认为输入量$m_2$和$m_1$是弱相关的，此时测量被测物品$m$的合成标准不确定度可采用方和根方法计算：$u_c(m)=\sqrt{u^2(m_1)+u^2(m_2)}$

因此，如果使用同一台仪器测量不同的两个量，而在数学模型中，这两个量是相减的或者是相除(商)，则它们是负相关的。这种情况下为了保险起见，依然可以采用方和根（**RSS**）方法合成。

【例】设$y=c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3$，试讨论其相关性。

【解】

(1) 如果x_1，x_2和x_3互不相关，由式(7.1)可得

$$u_c^2(y)=[c_1u(x_1)]^2+[c_2u(x_2)]^2+[c_3u(x_3)]^2$$
$$=u_1^2+u_2^2+u_3^2$$

(2) 如果x2和x3之间相关，由式(7.5)可得

$$u_c^2(y)=[c_1u(x_1)]^2+[c_2u(x_2)]^2+[c_3u(x_3)]^2$$
$$+2c_1c_2u(x_2)u(x_2)r(x_2,x_3)$$
$$=u_1^2+u_2^2+u_3^2+2u_2u_3r_{23}$$

【例】设$y=c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3$，试讨论其相关性。

【解】

(3) 如果x_1，x_2和x_3之间相关，由式(7.8)可得

$$u_c^2(y)=u_1^2+u_2^2+u_3^2+2u_1u_2r_{12}+2u_1u_3r_{13}+2u_2u_3r_{23}$$

当相关系数$r_{12}=r_{13}=r_{23}=1$时，上式变为

$$u_c^2(y)=u_1+u_2+u_3$$

【例】当标称值均为1k Ω的10个电阻器，用同一个值为R_s的标准电阻器校准时，设校准不确定度可忽略，检定证书给出的R_s不确定度为$u(R_s)=0.01\Omega$。现将此10个电阻器用电阻可忽略的导线串联，构成标称值为10kΩ的参考电阻$R_{ref}=f(R_i)=\sum R_i$。试求R_{ref}的合成标准不确定度。

【解】 根据题意，R_{ref}的合成标准不确定度中有如下关系：

$$u_c(R_{ref}) \neq 0.32\Omega!$$

$c_i = \partial R_{ref} / \partial R_i = 1$；

$u(R_i) = u(R_j) = u(R_s)$（因为校准的不确定度可忽略）；

$u(R_s) = 100\text{m}\Omega$；

$r(R_i, R_j) = +1$。

故有

$$u_c^2(x_i) = \left[\sum_{i=1}^{n} c_i u(x)\right]^2 = \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} u(x_i)\right]^2$$

$$u_c(R_{ref}) = \sum_{i=1}^{10} u(R_s) = 10 \times 0.1\Omega = 1.0\Omega$$

合成不确定度的自由度ν

合成标准不确定度$u_c(y)$的自由度称为有效自由度ν_{eff}。如果$u_c^2(y)$是两个或多个估计方差分量的合成，即$u_c^2(y)=\sum_{i=1}^{N}c_i^2u^2(x_i)$则通常可以认为它服从$t$分布，其有效自由度用韦尔奇－萨特思韦特(Welch - Satterthwaite)公式计算：

$$\nu_{eff}=\frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^{N}\frac{u_i^4(y)}{\nu_i}}$$

式中，ν_i是$u(x_i)$自由度。显然有：$\nu_{eff}\le\sum_{i=1}^{N}\nu_i$

也可用于计算相对合成标准不确定度的自由度，这时有：

$$\nu_{eff}=\frac{[u_c(y)/y]^4}{\sum_{i-1}^{N}\frac{[p_iu(x_i)/x_i]^4}{\nu_i}}=\frac{[u_{rel}(y)]^4}{\sum_{i=1}^{N}\frac{[p_iu_{rel}(x_i)]^4}{\nu_i}}$$

合成不确定度的自由度ν

【例】已知某量由不相关的4个不确定度分量所组成，各分量的值和自由度分别为

$$u_1 = 10.0 \qquad \nu_1 = 5$$
$$u_2 = 10.0 \qquad \nu_2 = 5$$
$$u_3 = 10.0 \qquad \nu_3 = 5$$
$$u_4 = 10.0 \qquad \nu_4 = 5$$

求合成标准不确定度及其有效自由度ν_{eff}。

合成不确定度的自由度v

【解】由于各不确定度分量互不相关，用方和根方法求合成标准不确定度

$$u_c = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2}$$

$$= \sqrt{10.0^2 + 10.0^2 + 10.0^2 + 10.0^2} = 20.0$$

由式(7.9)得到效自由度v_{eff}。

$$v_{\text{eff}} = \frac{u_c^4}{\dfrac{u_1^4}{v_1} + \dfrac{u_2^4}{v_2} + \dfrac{u_3^4}{v_3} + \dfrac{u_4^4}{v_4}} = 20$$

（七）扩展不确定度的评定

输出量的分布特征

合成标准不确定度评定的基本过程是由各个标准不确定度分量$u_c(y)=c_i u(x_i)$，通过计算求出合成标准不确定度$u_c(y)$。值得指出的是：

(1) 各输入量X_i可能服从不同的分布(如正态分布、均匀分布、三角分布等)，对应于每一个输入量X_i有三个参量，即标准不确定度$u(x_i)$、自由度ν_i及其分布特征。

(2) 输出量(被测量)Y也具有三个参量，即合成标准不确定度$u_c(y)$、有效自由度ν_{eff}以及其分布特征。

输出量的分布特征

很明显，合成标准不确定度$u_c(y)$及其有效自由度ν_{eff}可以由相应的数学公式计算给出。问题是，输出量Y服从什么分布？对于这个问题，统计学中有系统的论述。

如果，$$Y = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \cdots + c_N X_N = \sum_{i=1}^{N} c_i X_i$$

以及所有的X_i是用正态分布表征的，则Y的卷积分布的结果也是正态分布的。而且，即使X_i的的分布不是正态分布，随着测量样本容量N的增大，样本平均值的分布将逐渐变形而趋近于一个正态分布。

如果输出量(被测量)$Y=X_1+X_2$，其中X_1服从正态分布，而X_2服从均匀分布，且$u(x_1)$比$u(x_2)$小很多，则可认为输出量Y较多地具有均匀分布的特征。

扩展不确定度

扩展不确定度的表示方式分为两种，即U和U_p。U表示标准偏差的倍数，U_p表示具有置信概率p的置信区间的半宽度。两者的含义是不同的，必要时应采用符号下标加以区别。

扩展不确定度U由合成标准不确定度$u_c(y)$乘以包含因子k得到

$$U = ku_c(y)$$

测量结果可表示为$Y=y\pm U$，y是被测量Y的最佳估计值，被测量Y的可能值以较高的置信概率(或置信水平或置信水准)落在区间[$y-U$，$y+U$]内。即$y-U \le Y \le y+U$。

对于任一给定的置信概率或置信水准p，扩展不确定度U_p表示为

$$U_p = k_p u_c(y)$$

1.不计算自由度时扩展不确定度的表示方法

当y及$u_c(y)$所表征的概率分布近似为正态分布，且$u_c(y)$的有效自由度较大时，在合成标准不确定度$u_c(y)$确定后，乘以一个包含因子k，即

$$U = ku_c(y)$$

可以期望在$y-U \le Y \le y+U$的区间包含了测量结果可能值的较大部分。一般取k=2~3，在大多数情况下取k=2。

当取其他值时，应说明其来源。

(1) 取 $U = 2u_c(y)$ 时，置信概率近似为95%。

(2) 取 $U = 3u_c(y)$ 时，置信概率近似为99%。

2.计算自由度时扩展不确定度的表示方法

如果$u_c(y)$的自由度较小，并要求置信区间具有规定的置信水平(或置信水准或置信概率)p，当按中心极限定理估计其分布接近正态分布时，采用t分布临界值。

将$u_c(y)$乘以给定概率p的包含因子k_p，从而得到扩展不确定度Up。可以期望在$y-U_p$至 $y+U_p$的区间内，以概率p包含了测量结果可能。$k_p = t_p(\nu_{\text{eff}})$ ，一般采用p值为95％和99％。多数情况下，采用p =95%。也可根据有关规定采用p =99% 。当ν_{eff}充分大，可近似认为k_{95}=2， k_{99}=3，从而分别给出

$$U_{95} = 2u_c(y) \qquad U_{99} = 3u_c(y)$$

扩展不确定度

【例】由于数学模型$y=f(x_1，x_2，x_3)=bx_1x_2x_3$是乘积关系，则可采用相对标准不确定度进行合成。估计值x_1，x_2，x_3是分别为$n_1=10$，$n_2=5$和$n_3=15$次独立观测值的算术平均值，其相对标准不确定度分别为

$$u_{\text{rel}}(x_1)=u(x_1)/x_1=0.25\%$$

$$u_{\text{rel}}(x_2)=u(x_2)/x_2=0.57\%$$

$$u_{\text{rel}}(x_3)=u(x_3)/x_3=0.82\%$$

求结果的具有95％置信水准的扩展不确定度。

【解】(1) 应用式(7.3)，合成标准不确定度为

$$u_{\mathrm{crel}}(y)=\frac{u_{\mathrm{c}}(y)}{y}=\sqrt{\left[\frac{u(x_1)}{x_1}\right]^2+\left[\frac{u(x_2)}{x_2}\right]^2+\left[\frac{u(x_3)}{x_3}\right]^2}$$

$$=\sqrt{0.25^2+0.57^2+0.82^2}\%=1.03\%$$

(2) 各分量自由度分别为$\nu_1=n_1-1=9$，$\nu_2=n_2-1=4$和$\nu_3=n_3-1=14$。由式(7.10)得

$$\nu_{\mathrm{eff}}=\frac{[u_{\mathrm{crel}}(y)]^4}{\sum_{i=1}^{3}\frac{[p_i u_{\mathrm{rel}}(x_i)]^4}{\nu_i}}=\frac{1.03^4}{\frac{0.25^4}{10-1}+\frac{0.57^4}{5-1}+\frac{0.82^4}{15-1}}=19.0$$

(3) 取置信概率p=95%，根据$\nu_{\mathrm{eff}}=19$，查t分布表得到$t_{95}(\nu_{\mathrm{eff}})=t_{95}(19)=2.09$。故

$$U_{\mathrm{rel}}=k_{95}u_{\mathrm{crel}}(y)=t_{95}(19)u_{\mathrm{crel}}(y)=2.09\times1.03\%=2.2\%$$

3. 其它分布的扩展不确定度的表示方法

如果可以确定被测量*Y*可能值的分布不是正态分布，而是接近于其他分布，则绝不应取k=2~3或 $k_p = t_p(\nu_{\text{eff}})$ 。例如，当*Y*可能值近似为均匀分布，则包含因子k_p与U_p之间的关系如下

对于 U_{95}，k_p=1.65

对于 U_{99}，k_p=1.71

（八）测量结果及其不确定度报告

测量结果及其不确定度报告

完整的测量结果含有两个基本量，一是被测量Y的最佳估计值y，通常由数据测量列的算术平均值给出，另一个就是描述该测量结果分散性的量，即测量不确定度。它实际上是测量过程中来自测量设备、人员、测量方法、环境及被测物品所有的不确定度因素的集合，一般以合成标准不确定度$u_c(y)$、扩展不确定度$U(y)$或它们的相对形式$u_{crel}(y)=u_c(y)/|y|$（$|y|\neq0$）、$U_{rel}(y)=U(y)/|y|$（$|y|\neq0$）给出。

测量结果及其不确定度报告

(1) 被测量Y的最佳估计值y一般是有量纲的量，如200mm，12.06g等。对于量纲1的量，其测量结果的表达为一个数。

(2) 测量不确定度以$u_c(y)$或$U(y)$的形式给出时，具有与被测量Y的最佳估计值y相同的量纲，如$u_c(y)$=0.04mm，$U(y)$=0.08mm等。若测量不确定度以$u_{crel}(y)$或$U_{rel}(y)$的形式给出时，都是无量纲的量。例如$U_{rel}(y)=4\times10^{-4}$。当以相对形式表示测量不确定度时，置信区间半宽度由相对测量不确定度乘以最佳估计值得到。

测量结果不确定度报告的信息

(1) 对于比较重要的测量，不确定度的报告一般包括以下内容：

① 有关输入量与输出量的函数关系以及灵敏系数c_i。

② 修正值和常数的来源及其不确定度。

③ 输入量X_i的实验观测数据及其估计值x_i，标准不确定度$u(x_i)$的评定方法及其量值、自由度ν_i，并将它们列成表格。

④ 对所有相关输入量给出其协方差或相关系数r及其获得方法。

⑤ 测量结果的数据处理程序，该程序应易于重复，必要时报告结果的计算应能独立重复。

测量结果不确定度报告的信息

(2) 工业生产、商业等日常的大量测量，一般不要求提供测量不确定度

例如去商场购买1m布和1kg水果等。不过前提条件是所使用的计量器具是经过检定的并处于合格状态，其测量程序有技术文件明确规定。例如上例中使用的尺子和秤等应满足相应的技术要求。

测量结果不确定度报告的信息

(3) 证书上的校准结果或修正值应给出测量不确定度。

这一条对计量部门和校准实验室尤为重要。报告中提供的信息量的多少随测量的性质不同而有所变化。

如国家基准的测量不确定度报告应包含较多的信息，一般的校准实验室和检测实验室，只需要提供被测量的最佳估计值及测量不确定度即可。需要指出，所有报告的信息应是最新信息，例如测量方法发生变化后，包括实验室采用的标准方法发生变化后，以使提供的信息与实际使用的测量程序相一致。

测量结果不确定度报告的信息

(4) 有时信息量的多少由用户的具体要求给出。

(5) 符合CNAS 的相关政策和规定。

扩展不确定度报告

1. 适用范围

除某些特殊要求的情况之外，一般情况下都采用扩展不确定度U、U_{rel}或U_p、U_{prel}报告测量结果的不确定度。

扩展不确定度报告

2. 报告包含的内容

当用扩展标准不确定度U或Up报告测量结果的不确定度时，除提供第一节所述信息外，还应做到

(1) 给出被测量Y是如何定义的充分描述。

(2) 给出被测量X的估计值y及扩展标准不确定度U或U_p；U或U_p都应给出单位。

(3) 必要时，可以相对扩展标准不确定度

$U_{rel}(y)= U(y)/|y|$（$|y|\neq 0$）。

(4) 对U应给出包含因子k，对应明确置信水平(或置信水准或置信概率)p，JJF 1059-1999推荐给出有效自由度ν_{eff}，以便于不确定度传播到下一级。

3、扩展不确定度报告基本形式

(1) 采用形式$U=ku_c(y)$报告测量结果的不确定度

取包含因子$k=2$，扩展不确定度为

$U=ku_c(m_s)=2\times0.35\text{mg}=0.70\text{mg}$，

测量结果不确定度报告有以下两种形式：

① $m_s=100.021\ 47\text{g}$，$U=0.70\text{mg}$；$k=2$。

② $m_s=(100.021\ 47\pm0.000\ 70)\text{g}$；$k=2$。

3、扩展不确定度报告基本形式（续）

(2) 采用形式$U_p=k_pu_c(y)$报告测量结果不确定度

① m_s=100.021 47g，U_{95}=0.70mg； ν_{eff}=9。

② m_s=(100.021 47±0.000 70)g； ν_{eff}=9，括号内第二项为 U_{95}之值。

③ m_s=100.021 47(79)g； ν_{eff}=9，括号内为U_{95}之值，其末位与前面结果末位数对齐。

④ m_s=100.021 47(0.000 79)g； ν_{eff}=9，括号内为U_{95}之值，与前面结果有相同计量单位。

注意事项

① 被测量X的估计值y与扩展标准不确定度的数值的有效位数应一致。

② 报告中置信概率(或置信水平或置信水准)的表述，如U_{95}，U_{99}对应的置信概率为95％，99％，一般不使用95.45%，99.73%，也不使用0.95，0.99表述。

③ 国内外计量界过去常常用p=99.73%，所谓3σ的置信概率。实际上，只有在理论上是正态分布形式，而且重复测量次数$n\to\infty$时，p=99.73%才有可能。所以，今后在实际应用中，即使k=3，也只能给出p=99%。在工业技术领域，通常只采用p=95%，这时ISO的一些技术标准中所推荐的。当技术规范中对置信概率(或置信水平或置信水准)有明确规定时，则执行其规定。

测量不确定度应与测量结果的有效位数一致

输入量和输出量的估计值，应修约到与它们不确定度的位数一致。如，y=10.057 62Ω，$u_c(y)$=27mΩ，则y应进位到10.058Ω。如果相关系数的绝对值接近1时，应给出三位有效数字。

现仍以质量为ms的标准砝码的测量结果不确定度报告为例，例如测量结果为m_s=100.021 47g，合成标准不确定度$u_c(m_s)$为0.35mg。这种表示方法是正确的。

如果m_s=100.021 47g，扩展不确定度为U=0.7mg。则应该将测量结果修约为m_s=100.021 4g。

如果m_s=100.021 47g，扩展不确定度为U=0.017mg。则应该将测量结果修约为m_s=100.021 470g。

④修约注意事项

(a) 不许连续修约

在确定修约间隔后，应一次修约获得结果而不能多次修约。

- 例如：对**15.4546mm**修约，修约间隔为**1mm**
- 正确修约：**15.4546mm→15mm**。
- 错误修约：**15.4546mm→15.455mm**。

→15.46mm →15.5mm

→16mm。

④修约注意事项

(b) 相对不确定度的修约

当不确定度以相对形式给出时，不确定度也应最多保留两位有效数字。此时，测量结果的修约应将由相对形式返回到绝对形式，同样至多保留两位，再修约相应的测量结果。

- 例如，质量为**ms**的标准砝码的测量结果为

$$m_s=100.021\ 474\ 6\text{g}$$

其相对扩展不确定度为$U_{95rel}=7.94\times10^{-6}$，保留两位有效数字，修约成两位为$U_{95}=7.9\times10^{-4}$g，故得

$$m_s=100.021\ 47\text{g}；U_{95rel}=7.9\times10^{-6}。$$

不确定度评定一般程序

说明被测量，建立数学模型，确定被测量Y与输入量X_1，X_2……X_n的关系

↓

识别测量不确定度的来源

↓

列 表 说 明

↓

量化标准不确定度分量

↓

量化A类不确定度　　　量化B类不确定度

↓

计算合成标准不确定度

↓

计算扩展不确定度

↓

报告测量结果及不确定度

三、与不确定度有关的认可公开文件

（一）与不确定度有关的公开文件目录 p.191

（二） CNAS-CL07：2006 《测量不确定度评估和报告通用要求 》介绍 p.193

（三） CNAS-CL08：2006《评价和报告测量结果与规定限量符合性的要求》介绍 p.204

（四）CNAS-GL05：2006《测量不确定度要求的实施指南》介绍 p.217

（五） CNAS-GLxx：2007《最佳测量能力评定指南》介绍 p.218

（一）与不确定度有关的公开文件目录

1.CNAS-CL07：2006《测量不确定度评估和报告通用要求》

2.CNAS-CL08：2006《评价和报告测量结果与规定限量符合性的要求

3.CNAS-GL05：2006《测量不确定度要求的实施指南

4.CNAS-GLxx：2007《最佳测量能力评定指南》

5. **CNAS-GL06：2006**《化学分析中不确定度的评估指南》

6. **CNAS-GL07：2006**《电磁干扰测量中不确定度的评估指南》

7. **CNAS-GL08：2006**《电器领域不确定度的评估指南》

8. **CNAS-GL10：2006**《材料理化检验测量不确定度评估指南及实例》

（二）CNAS-CL07:2006《测量不确定度评估和报告通用要求》介绍

5.1 CNAS 在认可实验室的技术能力时，必须要求校准实验室和开展自校准的检测实验室制定测量不确定度评估程序并将其用于所有类型的校准工作，必须要求检测实验室制定与检测工作特点相适应的测量不确定度评估程序，并将其用于不同类型的检测工作。

《测量不确定度评估和报告通用要求 》介绍（续）

5.2 CNAS在认可实验室时应要求实验室组织校准或检测系统的设计人员或熟练操作人员评估相关项目的测量不确定度，要求具体实施校准或检测人员正确应用和报告测量不确定度。还应要求实验室建立维护评估测量不确定度有效性的机制。

《测量不确定度评估和报告通用要求》介绍（续）

5.3 对于校准实验室，其测量不确定度的评定程序和方法应符合有关规定，对用于校准和自校准所建立的计量标准和校准方法均须提供测量不确定度评定评估报告，对承担量值传递的标准和仪器设备，应在其校准证书上报告测量不确定度。

《测量不确定度评估和报告通用要求》介绍（续）

5.4 检测实验室应有能力对每一项有数值要求的测量结果进行测量不确定度评估。当不确定度与检测结果的有效性或应用有关①、或在用户有要求时②、或当不确定度影响到对规范限度的符合性时③、当测试方法中有规定时④和 CNAS 有要求时⑤（如认可准则在特殊领域的应用说明中有规定），检测报告必须提供测量结果的不确定度。

《测量不确定度评估和报告通用要求》介绍（续）

5.5 检测实验室必须建立测量不确定度的评估程序。对于不同的检测项目和检测对象，可以采用不同的评估方法。

5.6 检测实验室在采用新的检测方法之前，应制定相关项目的测量不确定度的评估方法。

《测量不确定度评估和报告通用要求 》介绍（续）

5.7 检测实验室对所采用的非标准方法、实验室自己设计和研制的方法、超出预定使用范围的标准方法以及经过扩展和修改的标准方法重新进行确认，其中应包括对测量不确定度的评估。

5.8 对于某些广泛公认的检测方法，如果该方法规定了测量不确定度主要来源的极限值和计算结果的表示形式时，实验室只要按照该检测方法的要求操作，并出具测量结果报告，即被认为符合本要求。

《测量不确定度评估和报告通用要求 》介绍（续）

5.9 由于某些检测方法的性质，决定了无法从计量学和统计学角度对测量不确定度进行有效而严格的评估，这时至少应通过分析方法，列出各主要的不确定度分量，并作出合理的评估。同时应确保测量结果的报告形式不会使用户造成对所给测量不确定度的误解。若检测结果不是用数值表示或者不是建立在数值基础上（如合格/不合格，阴性/阳性，或基于视觉和触觉等的定性检测），则不要求对不确定度进行评估，但鼓励实验室在可能的情况下了解结果的可变性。

《测量不确定度评估和报告通用要求》介绍（续）

5.10 检测实验室测量不确定度评估所需的严密程度取决于：

a） 检测方法的要求；

b） 用户的要求；

c） 用来确定是否符合某规范所依据的误差限的宽窄。

《测量不确定度评估和报告通用要求》介绍（续）

5.11 为了便于用户比较实验室的能力和水平，对于一般应用，扩展不确定度应对应 95％的置信水平。在表述实验室的能力时，一般采用最佳测量能力，即根据日常校准或检测系统，被校或被测样品接近理想状态时评估的最小测量不确定度。在校准证书或检测报告上应出具测量结果的不确定度。

《测量不确定度评估和报告通用要求》介绍（续）

5.12 报告测量不确定度时要避免使用过多的数字。除非另外规定，初步结果应该四舍五入成与测量不确定度一致的重要数字。当检测方法规定了修约水平，而且这一水平意味着会产生比实际测量不确定度大的值时，由于修约而带来的不确定度应该报告在结果中；另一方面，如果实际不确定度比报告要求的不确定度大时，实验室应该在报告中对测量不确定度的计算进行说明。

《测量不确定度评估和报告通用要求》介绍（续）

5.13 医学实验室测量结果不确定度（包括计量单位）的表达有其行业目前公认的方式和方法，**CNAS** 承认该行业国际公认的和政府管理部门承认的表达方式和方法。

（三）CNAS-CL08：2006《评价和报告测量结果与规定限量符合性的要求》介绍

在检测领域，实验室要通过检测来评价被测物品是否符合规范(specification)或技术产品标准规定的技术要求。

在计量检定/校准领域，实验室要通过检定/校准来评价测量器具是否符合技术规范(specification)或测量器具说明书规定的技术要求。

ISO/IEC 17025:2005《检测和校准实验室能力通用要求》在要素5.10“结果报告”中，要求实验室应向客户提供测量结果及其不确定度的声明，并且应客户的要求，还需评价测量结果与规范中规范限的符合性。

1、符合性评价的有关名词术语

- **(测量设备)的最大允许误差(MPE)**

  对给定的测量设备，由技术规范、检定规程等所允许的误差极限值。

- **(技术)规范 specification**

  对被测物品的公差限或测量设备特性的最大允许误差(MPE)的要求

- **规范限 specification limits**

  被测物品的公差限或测量设备最大允许误差。

- **上规范限(USL) upper specification limit**

  给定下列规定值之一：被测物品公差限的上界限；或测量设备特性允许误差值的上界限。

- 下规范限(LSL) lower specification limit

  给定下列规定值之一：被测物品公差限的下界限；或测量设备特性允许误差值的下界限

- 规范范围 specification interval

  规范区 specification zone

  被测物品或测量设备的特性在规范限之间(含规范限在内)的一切变动值

- 测量结果的完整表述(y')

  包括扩展不确定度(U)的测量结果，用下式给出

$$y' = y \pm U$$

式中，y——测量结果；

U——测量结果的扩展不确定度。

2、测量不确定度对符合性评价的影响

完整的测量结果(y')含有两个基本量，一是被测量Y的最佳估计值y，通常由数据测量列的算术平均值给出，另一个就是描述该测量结果分散性的量，即测量不确定度。包括扩展不确定度(U)的测量结果，用下式给出

$$y' = y \pm U \tag{3.1}$$

式中，y——测量结果；

U——测量结果的扩展不确定度。

$$U = ku_c \tag{3.2}$$

式中，k——包含因子，当没有特别注明时，k=2；

u_c——合成标准不确定度。

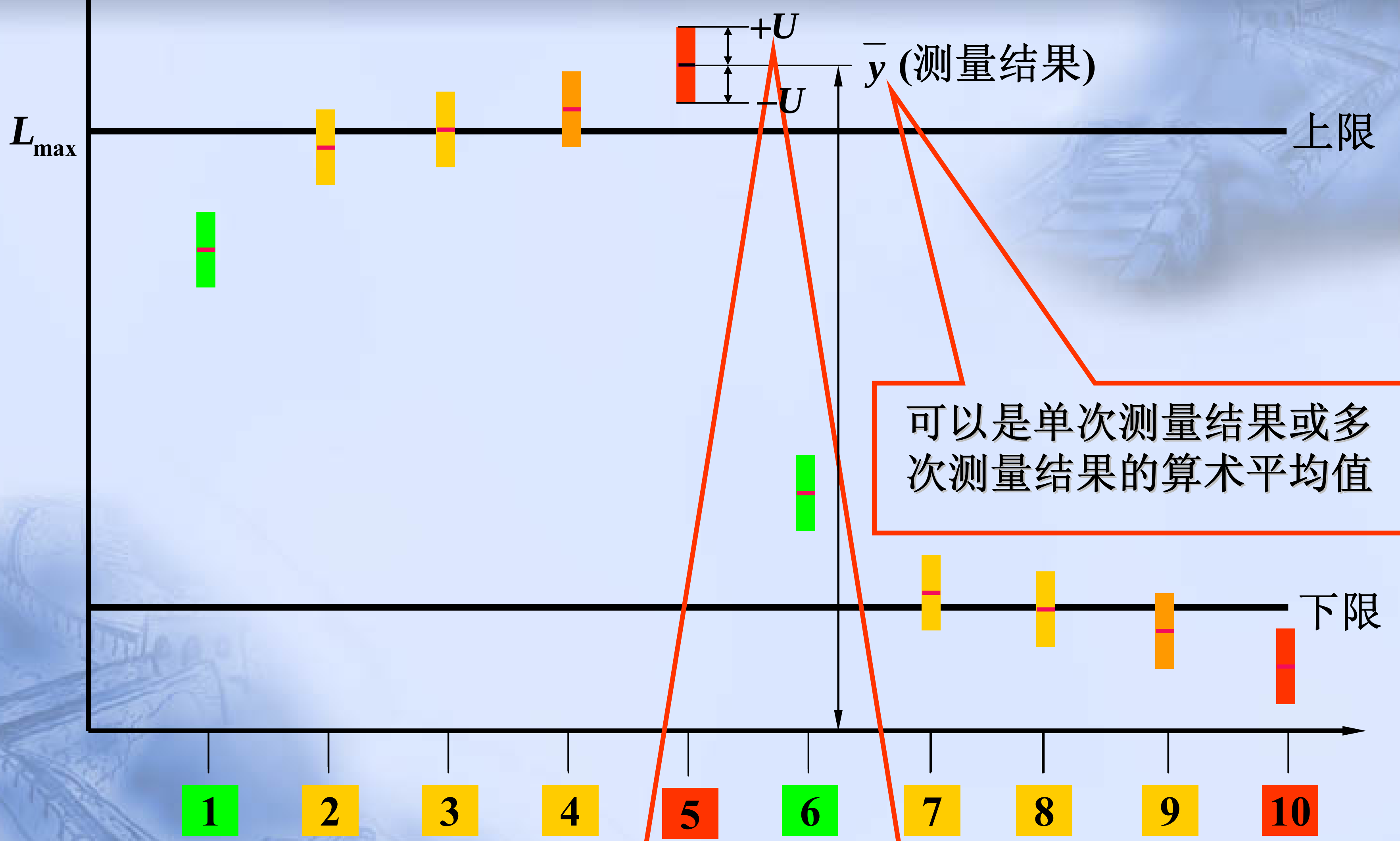


图3.1　与规范中规定限量的符合性评价的各种情况

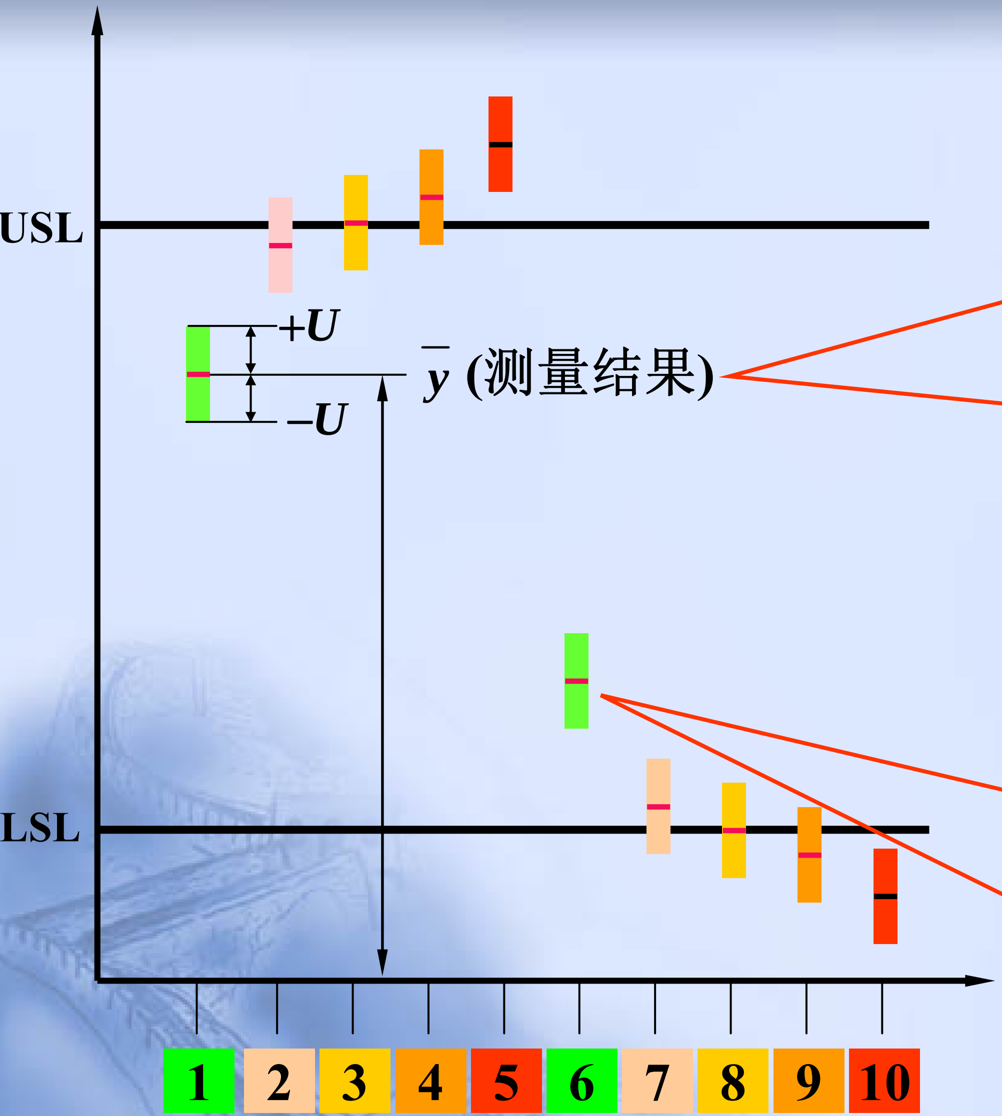
通常规定扩展不确定度U的置信概率$p≈95\%$，包含因子$k=2$

3、CNAS推荐的符合性评价规则

当测量执行一个规定的技术规范，并且客户或该规范要求做出符合性说明时，结果报告必须包含某种说明，以指出测量结果是否符合该规范。

最简单的情况是技术规范明确说明，将不确定度以给定置信水准扩展后，检测结果(y)将落在定义的规范限内或规范限外。对这些情况，可以直接给出符合性或不符合性评价(图3.1中情况1，5和6，10)。

在更多的情况下，技术规范要求在证书或报告中做出合性说明，但是并没有指明要考虑不确定度对符合性评价的影响。在这种情况下，适合于供用户做出符合性判断，但是，据此做出的检测结果并没有考虑不确定度。这就是通常所说的“风险共担”(shared risk)，因为在使用相同的测量方法测量之后该产品可能并不满足规范要求，从而使最终用户承担某种风险。在这种情况下，有一个隐含的假设，即相同测量方法的不确定度是可以接受的，更重要的是在必要时不确定度是可以评价的。国家法规可以否决“风险共担”原则，并将不确定度引起的风险加于其中一方。



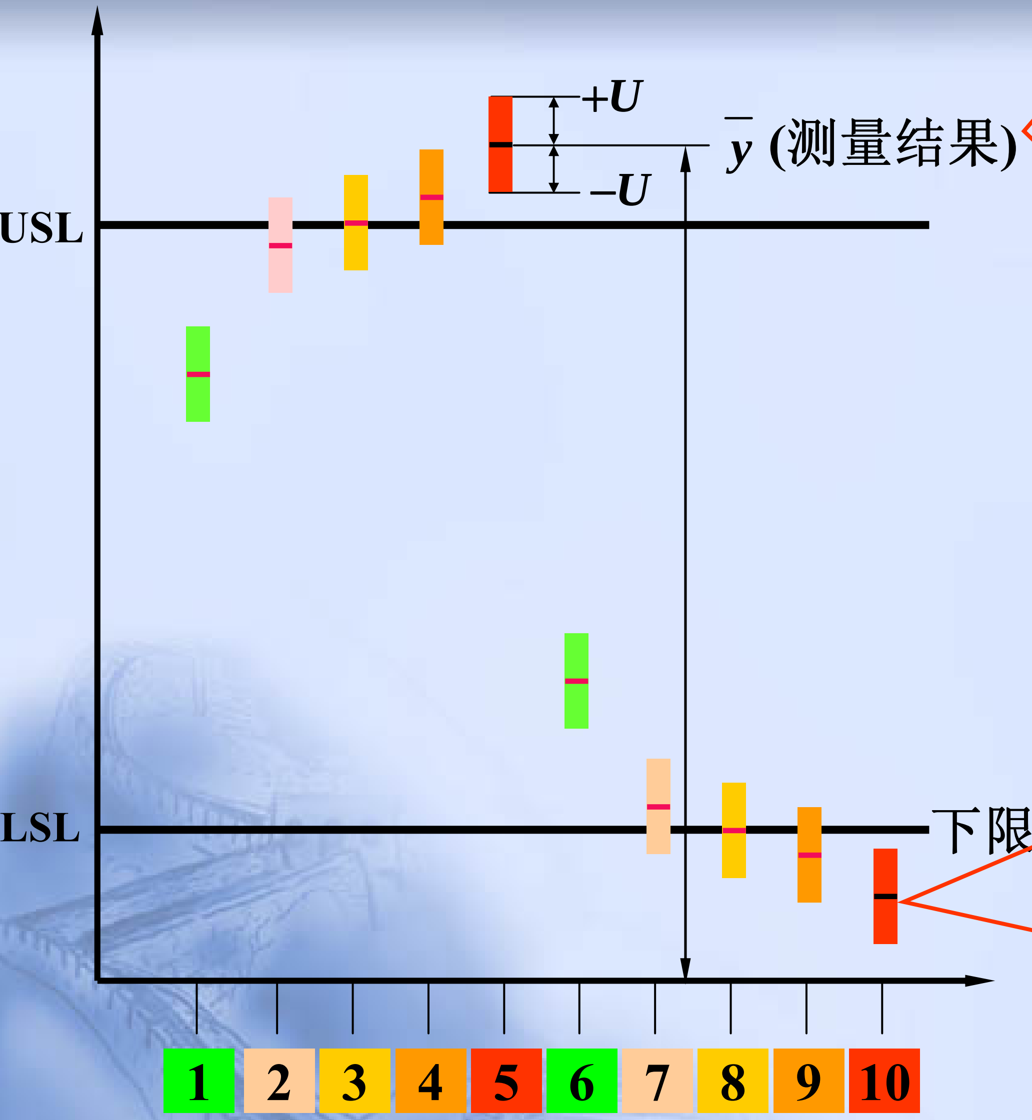
与规范中规定限量符合性评价的情况1和6

情况1：

向上扩展不确定度区间半宽度后，测量结果仍低于上限，则产品符合规范。

情况6：

向下扩展不确定度区间半宽度后，测量结果仍高于下限，则产品符合规范。



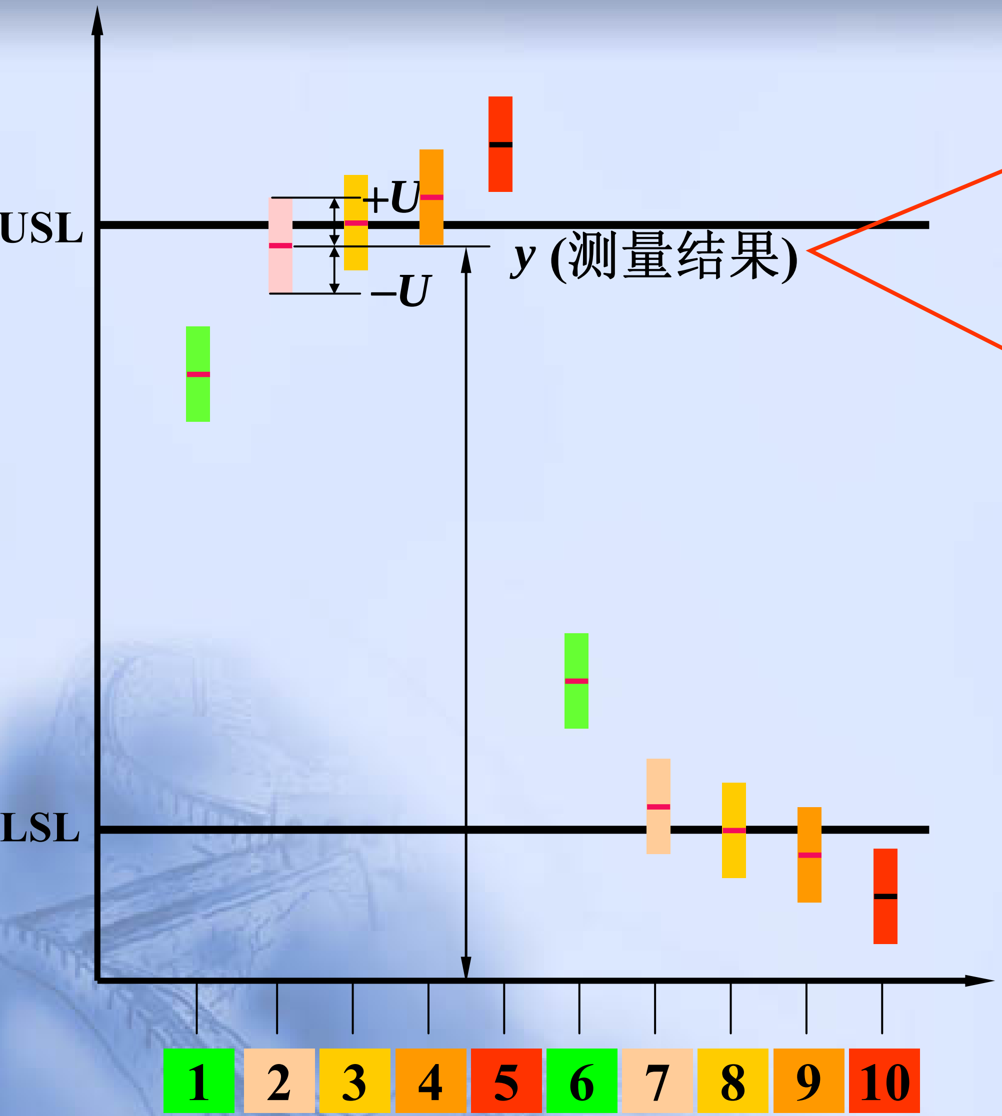
与规范中规定限量符合性评价情况5和10

情况5：

向下扩展不确定度区间半宽度后，测量结果仍高于上限，则产品不符合规范。

情况10：

向上扩展不确定度区间半宽度后，测量结果仍低于下限，则产品不符合规范。



与规范中规定限量符合性评价的情况2

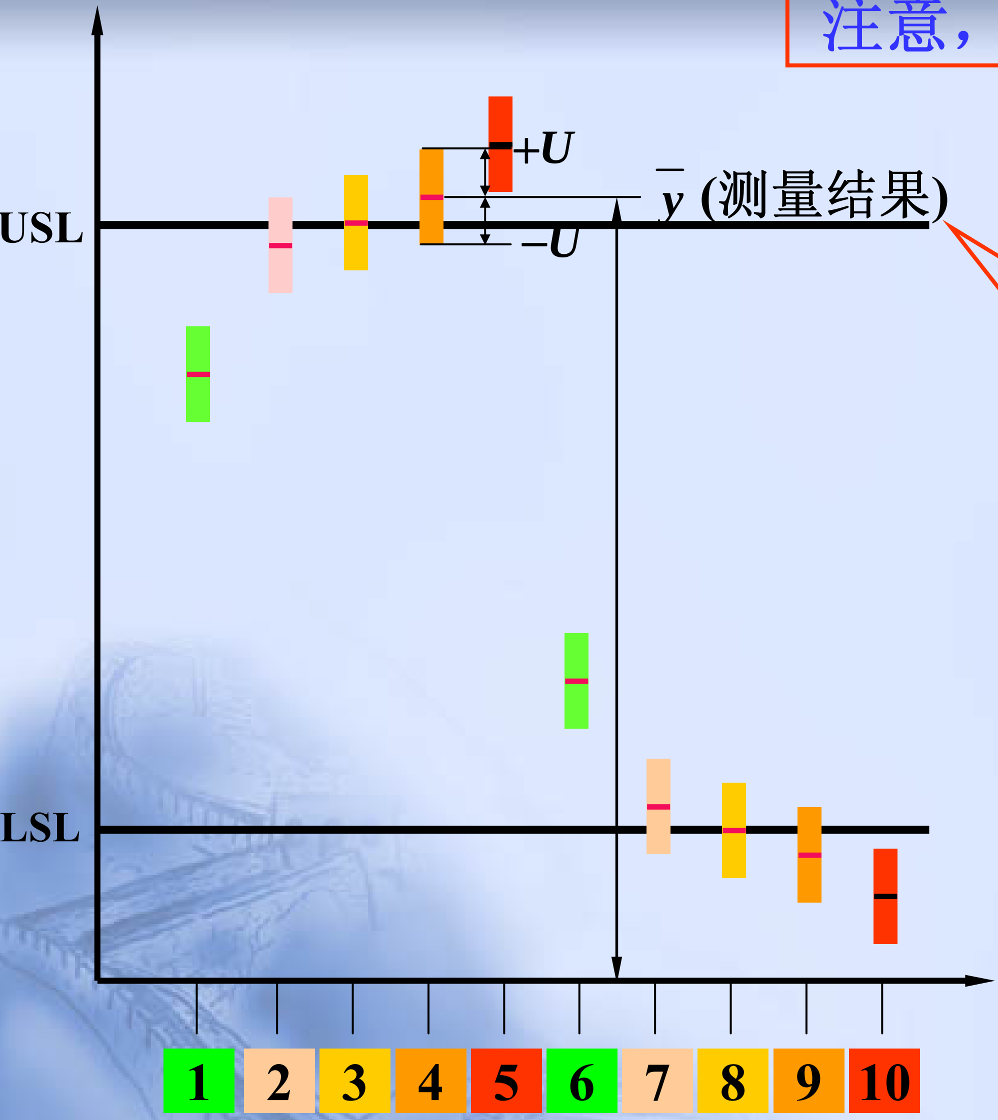
情况2：

测量结果(*y*)低于上规范限USL并有一富余量(USL–*y*)，但是富余量小于扩展不确定度区间半宽度(*U*)，即(USL–*y*)<*U*。因此不可能做出符合性声明。

但是，在可以接受低于95%置信水准的情况下，则有可能做出符合性声明

注意，这将增加风险！

注意，这将增加风险！

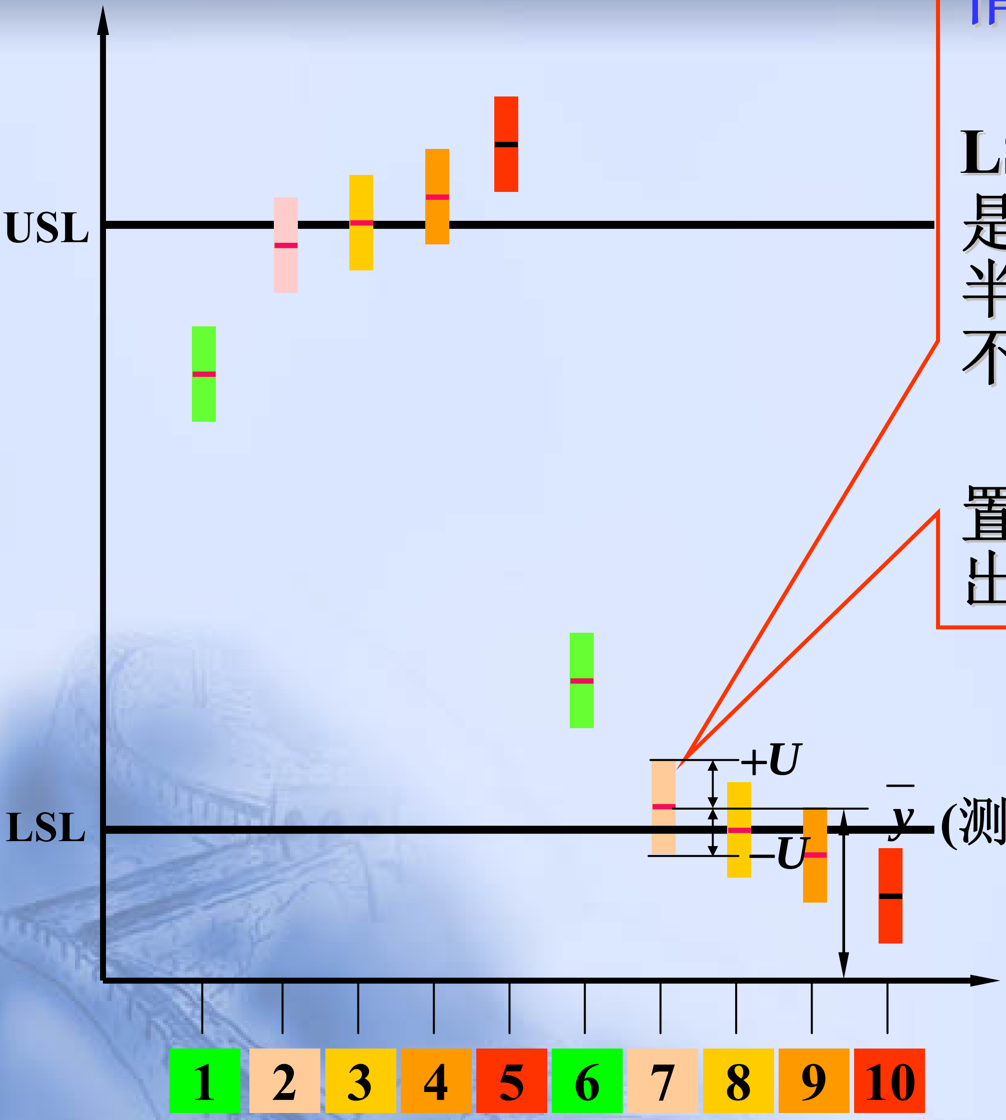


与规范中规定限量符合性评价的情况4

情况4：

测量结果(y)高于上规范限USL并有一富余量，(y–USL)，但是富余量小于扩展不确定度区间半宽度(U)，即(y–USL)<U。因此不可能做出不符合性声明。

但是，在可以接受低于95%置信水准的情况下，则有可能做出不符合性声明。



情况7：

测量结果(y)高于下规范限LSL并有一富余量(y–LSL)，但是富余量小于扩展不确定度区间半宽度(U)，即(y–LSL)<U。因此不可能做出符合性声明。

但是，在可以接受低于95%置信水准的情况下，则有可能做出符合性声明。

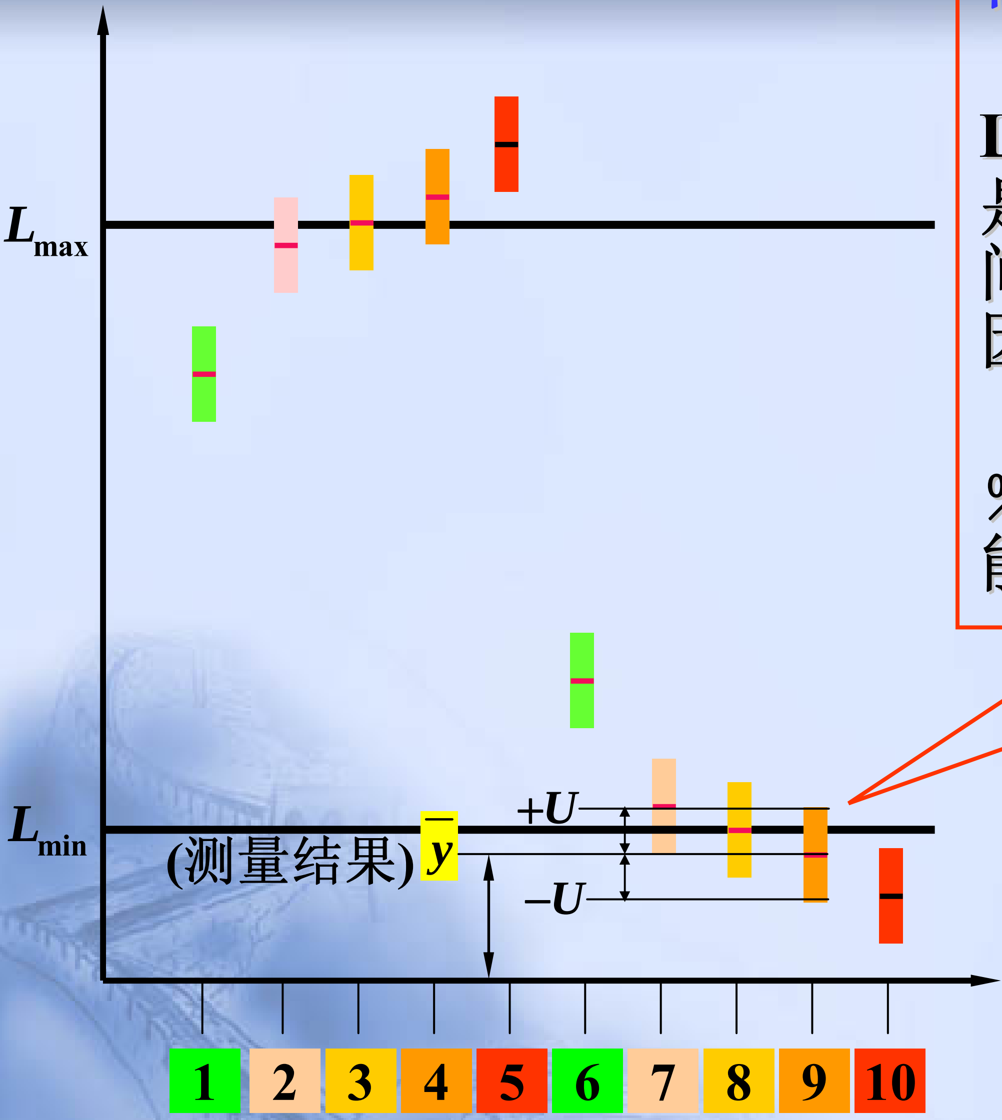
注意，这将增加风险！

与规范中规定限量符合性评价的情况7

情况9：

测量结果(y)低于下规范限LSL并有一富余量(LSL–y)，但是富余量小于扩展不确定度区间半宽度(U)，即(LSL–y)<U。因此不可能做出不符合性声明。

但是，在可以接受低于95％置信水准的情况下，则有可能做出不符合性声明。



与规范中规定限量符合性评价的情况9

注意，这将增加风险！

（四）CNAS-GL05：2006《测量不确定度要求的实施指南》介绍

3.检测和校准实验室不确定度评估的基本步骤

3.1 识别不确定度来源

3.2 建立测量过程的模型

3.3 逐项评估标准不确定度

3.4 合成不确定度*Uc(y)*的计算

3.5 扩展不确定度*U* 的计算

3.6 报告结果

（五） CNAS-GLxx：2007《最佳测量能力评定指南》介绍

1. 目的与范围

最佳测量能力是表征校准实验室测量能力的重要参数，通常在实验室认可的校准能力范围中列出，用户可据此判断实验室是否满足其校准要求。

《最佳测量能力评定指南》介绍（续）

- **3.3** 最佳测量能力 (best measurement capability，BMC)：实验室在其认可范围内，当对接近理想的测量标准（用于定义、实现、保存或复现某量的单位或其一个值或多个值）进行接近常规的校准时，可以达到的最小测量不确定度；或当对接近理想的测量仪器（用于测量某量）进行接近常规的校准时，可以达到的最小测量不确定度。

主要应用于国际实验室认可合作组织/区域认可机构（ILAC/RAB）框架内的实验室认可活动

《最佳测量能力评定指南》介绍（续）

- 用于表示认可校准实验室的重要技术参数之一；
- 一般在认可证书等文件中给出，这些文件在许多场合作为认可的证据；
- 通常在认可机构出版的认可实验室名录中列出作为重要信息之一。

《最佳测量能力评定指南》介绍（续）

3.4 校准和测量能力（Calibration and measurement capability，CMC）：通常提供给用户的校准或测量水平，它用包含因子包含概率$p=95\%$ 或$k=2$的扩展不确定度表示。有时称为最佳测量能力。

主要应用于国际计量局/区域计量组织（**BIPM/RMO**）框架内的国家计量院签发的校准和测量证书互认活动

《最佳测量能力评定指南》介绍（续）》

4.1 “常规校准”意味着，实验室在其认可时所进行的校准工作应能达到规定的日常的能力；而“接近理想”意味着，最佳测量能力不应取决于被校准仪器的特性，即仪器对测量不确定度不产生显著的影响，而这种仪器又是可获得的。如果实验室可获得的理想仪器对测量不确定度也有贡献，则这种贡献应包括在最佳测量能力中。

《最佳测量能力评定指南》介绍（续）

4.2 在评定最佳测量能力时，由于被测对象的性能（诸如重复性、稳定性、分辨力）是可获得的最佳值，故由其引入的不确定度分量最小。

并不是说不考虑被校准仪器对不确定度的影响，而是说这种影响处于理想的影响最小状态。

《最佳测量能力评定指南》介绍（续）

- 最佳测量能力是校准实验室认可的重要内容之一；
- 最佳测量能力是针对实验室所申请认可的校准的项目；
- 最佳测量能力的计算，关键是如何考虑被校准对象引起的不确定度；
- 最佳测量能力是实验室在其认可条件下对某一类型仪器校准结果不确定度的最小可能值。

实验室在校准证书或报告中给出的测量结果不确定度，必须大于或等于所认可最佳测量能力。

《最佳测量能力评定指南》介绍（续）

4.3 最佳测量能力的表述方法应与日常校准结果的测量不确定度表示方法相一致，通常也用包含概率p=95%或包含因子k=2的扩展不确定度表示。

4.4 最佳测量能力的完整的声明,通常可用不确定度范围、固定值、方程式或矩阵表示。

《最佳测量能力评定指南》介绍（续）

4.4.1 如果表示为与测量范围相对应的不确定度范围，则可能时还应给出其典型值（一般是测量不确定度的最小值）并注明其条件；若不确定度最小的测量点不是测量范围的上限或下限，则应予说明。

用范围给出BMC扩展不确定度，如果不加以说明，就认为是线性的。

《最佳测量能力评定指南》介绍（续）

4.4.2　如果在整个测量范围内或某一区段内不确定度不变，或按照校准规范/标准规定的或行业约定俗成的测量点给出不确定度，则可用固定值表示。

固定值给出BMC扩展不确定度，通常是用相对扩展不确定度给出。

《最佳测量能力评定指南》介绍（续）

4.4.3 如果不确定度随被测量变化，则可用方程式表示。

用方程式给出**BMC**不确定度的实例：

50MHz~18GHz，测量范围**A=(0~50)dB**同轴衰减器传输系数测量的扩展不确定度**(*k*=2)**：

$$(0.02+1.5\times10^{-3}A)\ \mathrm{dB}$$

《最佳测量能力评定指南》介绍（续）

当BMC用方程式表示时

①分量不确定度表示为测量范围的函数，合成标准不确定度也为函数，得出扩展不确定度也为函数。

②对相同仪器不同检定/校准点计算不确定度，然后拟合，理论上至少5点以上。

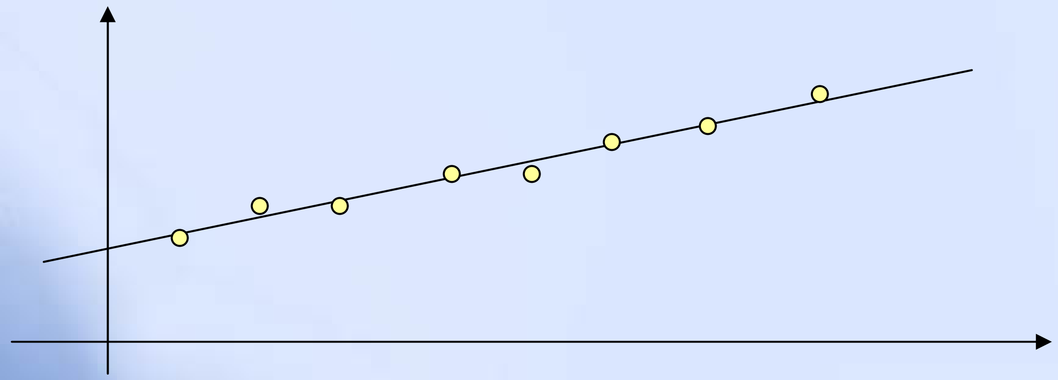


图3.2 用最小二乘法计算出直线的截距a和斜率b，就得到以函数式表示的温度响应特性。

《最佳测量能力评定指南》介绍（续）

4.4.4 如果不确定度不仅随被测量变化，还随其他量（例如时间、频率等）变化，则可用矩阵表示。

矩阵实例：AC数字多用表部分不确定度

	扩展不确定度(k=2)　μV/V				
	0Hz	100Hz	1kHz	100kHz	1MHz
2mV	790	710	710	710	890
10mV	510	380	380	380	650
100mV	210	85	85	170	260
1V	31	9	9	15	120
10V	32	11	11	19	130
1000V	36	21	21	48	

《最佳测量能力评定指南》介绍（续）

4.5　最佳测量能力的评定应具有真实性和合理性，例如，校准项目的最佳测量能力应与其在溯源链（或检定系统框图）中的位置相匹配，不允许出现在溯源链下级的测量不确定度比上级更小的现象。

4.6 不允许实验室在申请时缩小不确定度，而在参加测量审核或比对时扩大不确定度。必要时，应通过测量审核或与同级实验室的比对对认可实验室的最佳测量能力加以验证。

《最佳测量能力评定指南》介绍（续）

4.7 实验室最佳测量能力的信息应完整，对于多参量测量仪器的校准，应分别给出不同参量的最佳测量能力。

用旋光标准石英管校准旋光管时，在日常条件下测量不确定度评定

<table>
<tr><th>不确定度来源</th><th>评定类型</th><th>输入量标准不确定度(标准偏差)</th><th>包含因子</th><th>灵敏系数</th><th>输出量标准不确定度</th></tr>
<tr><td>观测读数变化</td><td>A</td><td>0.007°</td><td>1</td><td>1</td><td>0.007°</td></tr>
<tr><td>标准石英调节片的标准</td><td rowspan="6">B</td><td>0.001°</td><td>2</td><td>1</td><td>0.0005°</td></tr>
<tr><td>校准期间的漂移</td><td>0.001°</td><td>2</td><td>1</td><td>0.005°</td></tr>
<tr><td>温度补偿因子、温度计标准补偿因子对33.5°石英调节片的因子估算</td><td>0.13°C</td><td rowspan="3">$\sqrt{3}$</td><td>0.000144</td><td>0.00035°</td></tr>
<tr><td>旋光计的分辨力</td><td>0.025°</td><td>1</td><td>0.0145°</td></tr>
<tr><td>线性检测</td><td>0.025°</td><td>1</td><td>0.0145°</td></tr>
<tr><td colspan="5">合成标准不确定度</td><td>0.0222°</td></tr>
<tr><td colspan="5">扩展不确定度（包含因子k =2，包含概率约95%）</td><td>0.045°(旋光度)</td></tr>
</table>

用旋光标准石英管校准旋光管时，最佳测量能力评定

不确定度来源	评定类型	输入量标准不确定度(标准偏差)	包含因子	灵敏系数	输出量标准不确定度
观测读数变化	A	0.0035°	1	1	0.0035°
标准石英调节片的标准	B	0.001°	2	1	0.0005°
校准期间的漂移		0.001°	2	1	0.0005°
温度补偿因子、温度计标准补偿因子对33.5°石英调节片的因子估算		0.10°C	$\sqrt{3}$	0.000144	0.00029°
旋光计的分辨力		0.005°		1	0.0029°
线性检测		0.005°		1	0.0029°
合成标准不确定度					0.00545°
扩展不确定度（包含因子*k* ＝2，包含概率约95％）					0.011°(旋光度)

谢谢！